Méthodes directes en calcul des variations, quasiconvexité

Sylvie Benzoni-Gavage

Introduction

De façon générale le calcul des variations vise à minimiser des fonctionnelles du type :

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))dx$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbf{R}^n$, lorsque $u : \Omega \to \mathbf{R}^m$ satisfait une condition au bord du type $u = u_0$ sur $\partial\Omega$ et décrit un « espace fonctionnel » X (le plus souvent un espace de Banach) dans lequel I et la condition au bord ont un sens. La notation Du désigne la matrice jacobienne de u. Ce type de problème remonte, au moins pour le cas scalaire $m = n = 1$, à Bernoulli : Jacques 1er (1654-1705) résolut en 1696 le problème de la *courbe brachystochrone*, c'est-à-dire avec

$$f(x, u, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{2g(u-a)}},$$

où g et a sont des constantes et $u > a$. En 1744, Euler (1707–1783) donna une première condition nécessaire générale dans le cas $m = n = 1$,à savoir l'équation qui porte aujourd'hui son nom. Il est ainsi à la base de la méthode dite *classique*, à laquelle contribuèrent ensuite Lagrange (1736–1813), Legendre (1752–1833), Jacobi (1804–1851), Hamilton (1805–1865), Weierstrass (1815–1897) et Riemann (1826–1866). Ce dernier énonça notamment un principe concernant l'intégrale de Dirichlet (1805–1859) *i.e.* m=1 et

$$f(x, u, p) = f(p) = |p|_2^2 = \sum_{j=1}^n |p_j|^2$$

Elle atteindrait son minimum (pour les fonctions de classe C^1 et continues au bord) en une unique fonction harmonique. En fait il fallut attendre l'introduction des méthodes dites *directes* par Hilbert (1862–1943) et Lebesgue (1875–1941) pour établir rigoureusement ce principe. Ces méthodes furent ensuite appliquées intensivement par Tonelli. Elles suscitent encore aujourd'hui beaucoup d'intérêt, notamment pour étudier des problèmes d'élasticité non-linéaire où :

$$f(x, u, p) = W(x, p) + \Psi(x, u)$$

avec W et Ψ caractéristiques d'un matériau hyperélastique donné. Avant d'aller plus avant sur les méthodes directes, rappelons brièvement l'idée des *méthodes classiques*. Si f est de classe C^2, on cherche un minimum z de I parmi les fonctions de classe C^1 qui soit en fait de classe C^2. Soit alors une fonction ζ de classe C^1 nulle au bord : nécessairement la fonction d'une variable réelle $s \mapsto I(z + s\zeta)$ admet un point critique en $s = 0$. Autrement dit, en dérivant sous le signe d'intégration, on doit avoir :

$$\int_\Omega \{\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z(x), Dz(x))\zeta_i(x) +$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_{ij}}(x, z(x), Dz(x)) \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}(x)\}dx = 0$$

Comme ζ est nulle au bord ceci équivaut après intégration par parties à :

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^m \zeta_i(x)\{\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z(x), Dz(x)) -$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial p_{ij}}(x, z(x), Dz(x)))\}dx = 0$$

Puisque ζ est arbitraire on en déduit les équations d'Euler :

$$\forall i = 1, \cdots, m, \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial p_{ij}}(x, z(x), Dz(x))) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z(x), Dz(x)), \forall x \in \Omega$$

Ainsi toute solution *régulière* du problème de minimisation doit satisfaire ce système d'Equations aux Dérivées Partielles. Indépendamment de la question de l'existence de solutions à un tel système d'E.D.P, une telle méthode n'est pas très sûre : d'une part elle suppose *a priori* une propriété de régularité de la solution et, surtout, elle ne permet pas de décider si le point critique ainsi trouvé est effectivement un minimum. Ceci tend à montrer l'intérêt des *méthodes directes* que nous allons décrire ci-après. Afin de simplifier la présentation, on supposera que f ne dépend que de Du. On supposera également f à valeurs finies et continue sur $M^{m\times n} \simeq \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ (bien que ceci ne soit pas très réaliste en ce qui concerne l'élasticité). On peut remarquer alors que les équations d'Euler associées (si f est C^2) se simplifient quelque peu : $\forall i = 1, \cdots, m$,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ij}\partial p_{\alpha\beta}}(Dz) \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} = 0$$

En particulier pour l'intégrale de Dirichlet elles se réduisent à la seule équation de Laplace :

$$\Delta z = 0$$

Méthodes directes

L'idée de ces méthodes repose sur trois points :

(o) vérifier que I est minorée dans la classe des fonctions « admissibles », ceci assurant au moins

$$\inf\{I(u); u \in X, u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\} > -\infty$$

(i) montrer qu'il existe une *suite minimisante*, c'est-à-dire une suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim_{k\to\infty} I(v_k) = \inf I(u)$, qui soit *compacte* pour une certaine topologie,

(ii) montrer que I est *semi-continue inférieurement* vis-à-vis de cette topologie, c'est-à-dire que si u_k converge vers u (pour la dite topologie) alors

$$\liminf I(u_k) \geq I(u)$$

Ainsi la limite v de la suite obtenue en (i) fournit un minimum, puisqu'alors

$$\inf I(u) = \liminf I(v_k) \geq I(v) \geq \inf I(u)$$

Remarque 1. Le programme ainsi décrit est rendu difficile par le fait que l'espace fonctionnel X est (généralement !) de *dimension infinie.* En effet, dans le point (i), la compacité s'obtient le plus souvent en majorant $\|u\|_X$ et n'est vraie en dimension infinie que pour une topologie moins fine que la topologie forte, telle que la *topologie faible* ou la *topologie faible-$*$* (le lecteur non familier avec ces notions pourra consulter l'Appendice). Du même coup le point (ii) est plus compliqué à démontrer, la « semi-continuité inférieure faible » étant plus exigeante que la « semi-continuité inférieure forte » !

Exemple 1. Considérons

$$p \in \mathbf{R}^n \mapsto f(p) = |p|_2^r = \left(\sum_{j=1}^n |p_j|^2\right)^{r/2}$$

avec $r > 1$: en particulier pour $r = 2$ on retrouve l'intégrale de Dirichlet. Bien sûr le point (o) est trivial puisque $f \geq 0$. Prenons pour X l'espace de Sobolev $W^{1,r}(\Omega) = \{u \in L^r(\Omega); Du \in L^r(\Omega)\}$. L'espace des fonctions admissibles est ainsi $u_0 + W_0^{1,r}(\Omega)$, où u_0 est prolongée à l'intérieur de Ω et $W_0^{1,r}(\Omega)$ est un espace de fonctions « nulles au bord » en un certain sens (voir [4]). Si $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite minimisante de $I(u) = \int_\Omega f(Du)$ alors par définition $(I(v_k) = \int_\Omega |Dv_k|_r^r)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite réelle convergente donc majorée. D'après l'inégalité de Poincaré

$$\|w\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|Dw\|_{L^r(\Omega)}, \forall w \in W_0^{1,r}(\Omega)$$

(C indépendant de w), on a donc

$$\|v_k\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq M$$

(M indépendant de k). Comme $W^{1,r}(\Omega)$ est réflexif ceci assure que (v_k) est faiblement compacte. La semi-continuité inférieure faible de I est ici facile à obtenir, grâce à la *convexité* de f. En effet, quels que soient u_k et u dans $W^{1,r}$, on a alors presque partout

$$f(Du_k) \geq f(Du) + df(Du) \cdot (Du_k - Du)$$

d'où en intégrant sur Ω

$$I(u_k) \geq I(u) + \int_\Omega df(Du) \cdot D(u_k - u)$$

Or, si $u_k \rightharpoonup u$ dans $W^{1,r}$, alors $D(u_k - u) \rightharpoonup 0$ dans L^r. Et comme $df(Du) = r\,|Du|_2^{r-2}\,Du \in L^{r'}$, avec $r' = r/(r-1)$, on a

$$\int_\Omega df(Du) \cdot D(u_k - u) \to 0$$

d'où l'inégalité voulue

$$\liminf I(u_k) \geq I(u)$$

En fait d'après le théorème de Hahn-Banach toute fonction convexe continue sur un espace de Banach (ce qui est le cas ici pour I) est faiblement s.c.i. (voir [4]).

Remarque 2. Lorsqu'il n'y a pas d'espace X « naturel » comme dans l'exemple précédent, on prendra souvent $X = W^{1,\infty}(\Omega)$ l'espace des fonctions lipschitziennes, muni de la *topologie faible-$*$*. Le calcul ci-dessus montre d'ailleurs que, pour toute f convexe (et C^1), I est s.c.i dans $W^{1,\infty}$ faible-$*$.

Lorsque f n'est pas convexe le point (ii) devient beaucoup plus délicat. C'est ce qui a conduit Morrey à introduire en 1952 une notion nouvelle, celle de *quasiconvexité*, qui caractérise en fait la s.c.i faible-$*$ dans $W^{1,\infty}$. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

La notion de quasiconvexité et le théorème de Morrey

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω.

Définition 1. *On dit que $f : M^{m\times n} \to \mathbf{R}$ est quasiconvexe si, $\forall A \in M^{m\times n}$, $\forall\Omega$ domaine borné de $\mathbf{R}^n$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^m$,*

$$\int_\Omega f(A + D\varphi) \geq f(A)\,\mathrm{mes}(\Omega)$$

Exemple 2. Toute fonction convexe est quasiconvexe. En effet, d'après l'inégalité de Jensen :

$$\frac{1}{\operatorname{mes}(\Omega)}\int_\Omega f(A+D\varphi) \geq$$
$$f\left(\frac{1}{\operatorname{mes}(\Omega)}\int_\Omega (A+D\varphi)\right) = f(A)$$

puisque φ est nulle au bord. La terminologie est cohérente !

Théorème 1 (Morrey). *Soit $f : M^{m\times n} \to \mathbf{R}$ continue. La fonctionnelle $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \mapsto I(u;\Omega) = \int_\Omega f(Du)$ est s.c.i pour la topologie faible-$*$* quel que soit le domaine borné Ω *si et seulement si f est quasiconvexe.*

La démonstration utilise une autre formulation de la quasiconvexité.

Lemme 1. *L'application $f : M^{m\times n} \to \mathbf{R}$ est quasiconvexe si, et seulement si, $\forall A \in M^{m\times n}$, $\forall \zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^m)$ 1-périodique (*i.e *telle que $\zeta(x+\alpha) = \zeta(x), \forall x \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in \mathbf{Z}^n$)*

$$\int_{]0,1[^n} f(A+D\zeta) \geq f(A)$$

On laisse au lecteur le soin de s'en convaincre.

Démonstration (Théorème 1). Moyennant ce lemme, il n'est pas très difficile de voir que la quasiconvexité de f est une condition nécessaire pour que la fonctionnelle I soit s.c.i faible. Soient en effet comme dans le lemme $A \in M^{m\times n}$ et $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^m)$ 1-périodique. Pour $k \in \mathbf{N}^*$ on définit

$$\zeta_k(x) = \frac{1}{k}\zeta(kx), x \in C =]0,1[^n$$

Alors la suite ζ_k converge vers 0 dans $W^{1,\infty}(C)$ faible-$*$ lorsque k tend vers $+\infty$; car ζ_k converge uniformément sur $[0,1]^n$ (donc dans $L^\infty(C)$ fort) et $D\zeta_k(x) = D\zeta(kx)$ est bornée dans $L^\infty(C)$ et converge dans $L^\infty(C)$ faible-$*$ (d'après un résultat classique, voir par exemple [5] p.8) vers $\int_C D\zeta(y)dy$ qui vaut 0 puisque ζ est 1-périodique. Par suite on a aussi $u + \zeta_k \rightharpoonup u$ dans $W^{1,\infty}(C)$ faible-$*$ où $u(x) = A\cdot x$. Donc, d'après la semi-continuité inférieure faible de I

$$\liminf I(u+\zeta_k;C) \geq I(u;C) = f(A)$$

Or

$$I(u+\zeta_k;C) = \int_C f(A+D\zeta(kx))dx =$$
$$\int_C f(A+D\zeta(y))dy$$

après changement de variables et par périodicité de $D\zeta$. L'inégalité du lemme est donc satisfaite : f est nécessairement quasiconvexe.

La démonstration de la réciproque est plus technique. On commence par prendre pour $\Omega = C$ un hypercube, de côté $2h$, et une suite u_k de la forme $u_k = \zeta_k + u$ avec $\zeta_k \rightharpoonup 0$ dans $W^{1,\infty}(C)$ faible-$*$ (de sorte que $u_k \rightharpoonup u$) et u linéaire : $u(x) = A\cdot x$. On montre alors que

$$\liminf \int_C f(A+D\zeta_k) = \liminf I(u_k;C) \geq$$
$$I(u;C) = f(A)\operatorname{mes}(C)$$

Pour cela on « approche les ζ_k par des fonctions nulles au bord de C ». Plus précisément on remarque que, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe une constante $M \geq 1$ telle que

$$\|\zeta_k\|_{W^{1,\infty}(C)} \leq M$$

et que, quitte à extraire une sous-suite, ζ_k converge uniformément sur $\bar{C}$ vers 0 (d'après le théorème de Rellich : $W^{1,\infty}(C)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{C})$) ; en particulier $\mu_k = \|\zeta_k\|_{C^0(\bar{C})} < h$ à partir d'un certain rang k_0. Ceci permet de construire (voir [10]), pour tout $k \geq k_0$, une fonction η_k telle que

$$\|\eta_k\|_{W^{1,\infty}(C)} \leq M$$
$$\eta_k = \zeta_k \text{ sur } \partial C$$

et $\eta_k = 0$ dans le cube de côté $2(h-\mu_k)$ de même centre que C. Alors $\omega_k = \zeta_k - \eta_k \in W^{1,\infty}(C)$ (sa norme est majorée par $2M$) vaut 0 sur ∂C : la quasiconvexité de f permet d'affirmer (après régularisation éventuelle) que

$$\int_C f(A+D\omega_k) \geq f(A)\operatorname{mes}(C)$$

Or on a

$$\int_C f(A+D\zeta_k) = \int_C f(A+D\omega_k) +$$
$$\int_C (f(A+D\omega_k+D\eta_k) - f(A+D\omega_k))$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, le second terme tend vers 0 puisque $D\eta_k$ tend vers 0 presque partout et f est uniformément continue sur la boule fermée de centre A et de rayon $3M$. On a donc bien

$$\liminf \int_C f(A+D\zeta_k) \geq f(A)\operatorname{mes}(C)$$

pour finir la démonstration il faut généraliser à un domaine borné Ω et une limite u de u_k quelconques. On se ramène au cas précédent comme suit. Soit $\varepsilon > 0$. Comme on l'a déjà remarqué, si $u_k \rightharpoonup u$

dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ faible-$*$, il existe une constante $M \geq \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ telle que

$$\|u_k\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq M$$

Il existe donc, grâce à la continuité de f, un domaine $\Omega_0 \subset \Omega$ constitué d'hypercubes de côté $2^{-\nu_0}$, avec $\nu_0 \in \mathbf{N}$ assez grand, tel que

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |f(Du_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |f(Du)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Le domaine Ω_0 se redécoupe successivement en hypercubes de côté $2^{-\nu}$ avec $\nu \in \mathbf{N}$ et $\nu \geq \nu_0$. Si on note p^ν la fonction constante égale à la valeur moyenne de Du sur chacun des hypercubes de côté $2^{-\nu}$ constituant Ω_0, alors d'après le théorème de dérivation de Lebesgue p^ν tend vers Du p.p. sur Ω_0 lorsque ν tend vers $+\infty$ et $\|p^\nu\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq M$. On peut couper $\int_{\Omega_0}(f(Du_k) - f(Du))$ en trois morceaux. Deux d'entre eux, à savoir

$$\int_{\Omega_0} (f(Du_k) - f(Du_k + p^\nu - Du))$$

et

$$\int_{\Omega_0} (f(p^\nu) - f(Du))$$

tendent vers 0 lorsque ν tend vers $+\infty$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et l'uniforme continuité de f sur la boule fermée de centre 0 et de rayon $3M$. En particulier pour un $\nu_1 \geq \nu_0$ ils sont minorés par $-\varepsilon/4$. Quant au troisième il vérifie en particulier à l'étape $\nu = \nu_1$ et d'après le cas déjà étudié (en faisant la somme *finie* sur les tous hypercubes de côté $2^{-\nu_1}$ constituant Ω_0)

$$\liminf \int_{\Omega_0} (f(p^{\nu_1} + Du_k - Du) - f(p^{\nu_1})) \geq 0$$

Finalement on obtient

$$\liminf \int_{\Omega} (f(Du_k) - f(Du)) \geq -4\frac{\varepsilon}{4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et donc :

$$\liminf \int_{\Omega} f(Du_k) \geq \int_{\Omega} f(Du)$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

Malheureusement ce théorème (difficile) donne une caractérisation de la s.c.i faible qui n'est pas très maniable, dans la mesure où il est tout aussi difficile de déterminer si une fonction donnée f est quasiconvexe. C'est pourquoi Morrey a cherché à exprimer autrement la quasiconvexité. Mais il n'a pu obtenir que des conditions nécessaires *ou* suffisantes, comme on va le voir dans les deux paragraphes suivants. Il écrivait d'ailleurs dès 1952 : *It would seem that there is still a wide gap in the general case between the necessary and sufficient conditions for quasi-convexity which the writer has obtained. In fact, after a great deal of experimentation, the writer is inclined to think that there is no condition of the type discussed, which involves f and only a finite number of its derivatives, and which is both necessary and sufficient for quasi-convexity in the general case.*

Conditions suffisantes de quasiconvexité

On a vu dans l'exemple 2 qu'une fonction convexe était quasiconvexe. En fait on peut intercaler entre ces deux notions celle de *polyconvexité.*

Définition 2 (Ball). *On dit que $f : M^{m\times n} \to \mathbf{R}$ est polyconvexe si c'est une fonction convexe de tous les mineurs.*

Plutôt que d'expliciter de façon indigeste cette définition générale, voyons ce qu'elle donne dans certains cas particuliers « physiquement » intéressants.

Exemple 3.

1. si $m = 1$ ou $n = 1$: alors une matrice de $M^{m\times n}$ est en fait un vecteur (ligne ou colonne) et ses mineurs ne sont rien d'autre que ses coefficients. La polyconvexité équivaut donc dans un tel cas à la convexité.
2. si $m = n = 2$: les seuls mineurs d'une matrice 2×2 étant ses coefficients et son déterminant, une fonction $f : M^{2\times 2} \to \mathbf{R}$ sera polyconvexe si et seulement si il existe une fonction convexe $g : M^{2\times 2} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que
$$\forall A \in M^{2\times 2}, f(A) = g(A, \text{dét}A)$$
3. si $m = n = 3$: les seuls mineurs d'une matrice 3×3 étant ses coefficients, ses cofacteurs et son déterminant, une fonction $f : M^{3\times 3} \to \mathbf{R}$ sera polyconvexe si et seulement si il existe une fonction convexe $g : M^{3\times 3} \times M^{3\times 3} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que
$$\forall A \in M^{3\times 3}, f(A) = g(A, \text{com}A, \text{dét}A)$$

Remarque 3. Dans tous les cas une fonction convexe est évidemment polyconvexe. Mais il existe des fonctions polyconvexes qui ne sont pas convexes : par exemple le déterminant lorsque $m = n \geq 2$.

Théorème 2. *Toute fonction polyconvexe est quasiconvexe.*

Démonstration. Elle se déduit immédiatement de l'inégalité de Jensen (comme dans le cas convexe) et du lemme suivant. ∎

Soient $m, n \in \mathbf{N}$, $r \leq \min(m, n)$ et $I = \{i_1 < ... < i_r\} \subset [1, m]$, $J = \{j_1 < ... < j_r\} \subset [1, n]$. Pour toute matrice $A \in M^{m\times n}$ on note $|A|_{I,J}$ le mineur $r \times r$ correspondant aux indices $i \in I$ et $j \in J$. On a alors :

Lemme 2. *$\forall \Omega$ domaine borné de $\mathbf{R}^n$, $\forall A \in M^{m\times n}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^m$,*

$$\int_\Omega |A + D\varphi|_{I,J} = \mathrm{mes}(\Omega)|A|_{I,J}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$

$$\int_\Omega |D\psi|_{I,J}$$

ne dépend que des valeurs de ψ sur $\partial\Omega$: car alors, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^m$ (prolongée par 0 sur $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$),

$$\int_\Omega |A + D\varphi|_{I,J} = \int_\Omega |A|_{I,J} = \mathrm{mes}(\Omega)|A|_{I,J}$$

Or, si l'on note $dx^J = dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_r}$, $dx = dx^{[1,n]}$ et $d\psi^I = d\psi^{i_1} \wedge ... \wedge d\psi^{i_r}$, où $\psi^1, \cdots, \psi^m$ sont les composantes de ψ, on a

$$|D\psi|_{I,J}dx = \pm d\psi^I \wedge dx^{J^c} = d\omega$$

$$\omega = \pm \psi^{i_1} d\psi^{I'} \wedge dx^{J^c}$$

par exemple (avec $I' = \{i_2 < ... < i_r\}$). Par la formule de Stokes on a :

$$\int_\Omega |D\psi|_{I,J}dx = \int_{\partial\Omega} \omega$$

En fait, dans notre cas, ψ est linéaire (égale à A) au voisinage du bord et le résultat est dès lors trivial. Mais il reste vrai dans le cas général : l'intégrale écrite sur $\partial\Omega$ ne dépend effectivement que des valeurs de ψ sur $\partial\Omega$. On s'en convainc aisément en regardant comment elle est définie. Si (V, θ) est une carte locale de $\partial\Omega$ ($i.e\ \theta \in \mathrm{Diff}(\mathbf{R}^{n-1}; V)$) alors par définition

$$\int_V \omega = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \theta^*\omega$$

Or, si ψ et $\widetilde{\psi}$ coïncident sur V, on a $\psi \circ \theta = \widetilde{\psi} \circ \theta$ sur $\mathbf{R}^{n-1}$ et donc par différentiation composée

$$\forall i \in \{1, \cdots, m\}, (d\psi^i \circ \theta) \cdot d\theta = (d\widetilde{\psi}^i \circ \theta) \cdot d\theta$$

Par suite, $\forall y \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\forall e_1, \cdots, e_{n-1} \in \mathbf{R}^{n-1}$

$$(\theta^*\omega)(y) \cdot (e_1, \cdots, e_{n-1}) \stackrel{\text{déf}}{=}$$
$$\omega(\theta(y)) \cdot (d\theta(y) \cdot e_1, \cdots, d\theta(y) \cdot e_{n-1}) =$$
$$\widetilde{\omega}(\theta(y)) \cdot (d\theta(y) \cdot e_1, \cdots, d\theta(y) \cdot e_{n-1})$$
$$\stackrel{\text{déf}}{=} (\theta^*\widetilde{\omega})(y) \cdot (e_1, \cdots, e_{n-1})$$

avec la notation évidente $\widetilde{\omega} = \pm\widetilde{\psi}^{i_1} d\widetilde{\psi}^{I'} \wedge dx^{J^c}$. ∎

Mais, conformément à ce qu'avait annoncé Morrey, la polyconvexité n'est pas une condition nécessaire à la quasiconvexité. Dans le cas $m = n = 3$, Serre [12] a montré en 1983 que les formes quadratiques fournissaient un contre-exemple. Dans le cas $m = n = 2$ il a fallu attendre le contre-exemple de Dacorogna et Alibert en 1992 [8]. Ces derniers ont considéré pour $\gamma \in \mathbf{R}$:

$$\begin{array}{rlcl} f_\gamma : & M^{2\times 2} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ & p & \mapsto & |p|_2^2\,(|p|_2^2 - 2\gamma \mathrm{dét} p) \end{array}$$

avec $|p|_2^2 = \sum p_{ij}^2$ et montré en particulier :

Théorème 3. *La fonction f_γ est polyconvexe si et seulement si*

$$|\gamma| \leq 1$$

D'autre part il existe $\varepsilon > 0$ tel que f_γ est quasiconvexe si et seulement si

$$|\gamma| \leq 1 + \varepsilon$$

La démonstration de la première partie du résultat est calculatoire mais sans difficulté théorique. La seconde partie, en revanche, repose sur une estimation assez fine, à savoir :

$$\exists\delta > 0; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^2$$

$$\int_\Omega \Big(|D\varphi|_2^2 - 2\mathrm{dét}(D\varphi)\Big)^2 \geq \delta \int_\Omega |D\varphi|_2^4$$

Montrer une telle estimation équivaut en effet à trouver une constante $C > 0$ telle que :

$$\|D\varphi\|_{L^4(\Omega)^4}^4 \leq C \Big(\|\partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|\partial_2\varphi_1 + \partial_1\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}^4\Big)$$

c'est-à-dire à estimer la solution d'un problème de Cauchy-Riemann. La difficulté provient du cadre L^4. Dans un cadre L^2 l'estimation analogue serait triviale ; car, pour φ_1 par exemple, on a l'identité :

$$\int_\Omega (\partial_1\varphi_1)^2 + (\partial_2\varphi_1)^2 = \int_\Omega (\partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2)\partial_1\varphi_1 + \int_\Omega (\partial_2\varphi_1 - \partial_1\varphi_2)\partial_2\varphi_1$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|d\varphi_1\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \|d\varphi_1\|_{L^2(\Omega)^2} \big(\|\partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_2\varphi_1 + \partial_1\varphi_2\|_{L^2(\Omega)}\big)$$

soit encore

$$\|d\varphi_1\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq 2 \Big(\|\partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_2\varphi_1 + \partial_1\varphi_2\|_{L^2(\Omega)}^2\Big)$$

Les estimations dans L^r sont classiquement toujours plus délicates à obtenir pour $r \neq 2$ (voir la théorie de Calderon-Zygmund ...). Pour les détails de la démonstration du théorème 3, on renvoie à [8].

Conditions nécessaires de quasiconvexité

DÉFINITION 3. *On dit que* $f : M^{m\times n} \to \mathbf{R}$ *est rang-1-convexe si,* $\forall (A,B) \in (M^{m\times n})^2$ *tel que rang*$(A-B)=1$, $\forall s \in [0,1]$, *on a*

$$f(sA+(1-s)B) \leq sf(A)+(1-s)f(B)$$

EXEMPLE 4. Toute fonction convexe est *a fortiori* rang-1-convexe. Dans le cas $m=1$ ou $n=1$ les deux notions coïncident trivialement.

PROPOSITION 1. *Si* $f : M^{m\times n} \to \mathbf{R}$ *est de classe* C^2 *alors elle est rang-1-convexe si et seulement si elle vérifie la* condition de Legendre-Hadamard

$$\forall A \in M^{m\times n}, \forall \lambda \in \mathbf{R}^m, \forall \xi \in \mathbf{R}^n$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ij}\partial p_{\alpha\beta}}(A)\lambda_i\lambda_\alpha\xi_j\xi_\beta \geq 0$$

DÉMONSTRATION. On remarque que toute matrice $H \in M^{m\times n}$ de rang 1 s'écrit précisément

$$H = \lambda \otimes \xi, \lambda \in \mathbf{R}^m, \xi \in \mathbf{R}^n$$

où $(\lambda \otimes \xi)_{ij} = \lambda_i \xi_j$. Or la condition de Legendre-Hadamard ne dit rien d'autre que

$$d^2 f(A)\cdot(\lambda\otimes\xi, \lambda\otimes\xi) \geq 0$$

Quant à la rang-1-convexité de f elle équivaut à la convexité de $t \in \mathbf{R} \mapsto f(A+tH)$ pour toute H de rang 1. ∎

REMARQUE 4. La condition de Legendre-Hadamard exprime l'*ellipticité* des équations d'Euler.

THÉORÈME 4. *Une fonction quasiconvexe est nécessairement rang-1-convexe.*

La démonstration donnée par Ball en 1977 dans [1] est assez technique (utilisation de fonctions affines sur des pyramides de $\mathbf{R}^n$ ayant pour sommet commun 0...) mais ne présente pas de difficulté majeure. On renvoie le lecteur curieux à l'article cité. À cette occasion Ball tenta de montrer ce qui pourrait faire échouer la réciproque : selon lui la difficulté était de « remonter les calculs » pour des fonctions affines par morceaux lorsque les « morceaux » n'ont pas de sommet commun.

Quoi qu'il en soit la question de savoir si la rang-1-convexité impliquait la quasiconvexité est restée longtemps largement ouverte (voir [3]), excepté bien sûr pour le cas $m=1$ ou $n=1$; dans un tel cas la réponse est oui puisqu'alors :

$$\begin{array}{ccc} \text{convexe} & \Longleftrightarrow & \text{polyconvexe} \\ & \Downarrow & \\ & \text{quasiconvexe} & \\ & \Downarrow & \\ \text{rang-1-convexe} & \Longleftrightarrow & \text{convexe} \end{array}$$

La réponse était également connue comme affirmative pour le cas des formes quadratiques (voir [11]). En effet, pour $f(p) = C_{ij}^{\alpha\beta} p_{ij} p_{\alpha\beta}$ (avec la convention de sommation sur les indices répétés), on a pour tout $A \in M^{m\times n}$, pour Ω domaine borné de $\mathbf{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^m$:

$$\int_\Omega (f(A+D\varphi)-f(A)) = \int_\Omega C_{ij}^{\alpha\beta}\partial_j\varphi_i\partial_\beta\varphi_\alpha = \frac{1}{2}(C_{ij}^{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta}^{ij})\int_\Omega \partial_j\varphi_i\partial_\beta\varphi_\alpha$$

Or, la transformation de Fourier étant une isométrie pour le produit scalaire dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, on a :

$$\int_\Omega \partial_j\varphi_i\partial_\beta\varphi_\alpha = 4\pi^2 \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{\varphi}_i(\xi)\overline{\widehat{\varphi_\alpha}}(\xi)\xi_j\xi_\beta d\xi$$

D'autre part

$$C_{ij}^{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta}^{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ij}\partial p_{\alpha\beta}}(A),$$

quel que soit A. Donc la condition de Legendre-Hadamard pour f (c'est-à-dire aussi sa rang-1-convexité) implique :

$$\int_\Omega (f(A+D\varphi)-f(A)) \geq 0$$

Dans le cas général une réponse négative a été fournie par le contre-exemple de Šverák en 1992. Il concerne les matrices 3×2 et s'exprime assez simplement comme suit. Soit L le sous-espace vectoriel de $M^{3\times 2}$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ c & c \end{pmatrix}; a,b,c \in \mathbf{R}$$

On note P la projection orthogonale sur L. On définit $g : L \to \mathbf{R}$ par

$$g\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ c & c \end{pmatrix} = -abc$$

et pour $\varepsilon > 0$, $K > 0$:

$$\begin{array}{cccl} f_{\varepsilon,K} : & M^{3\times 2} & \to & \mathbf{R} \\ & A & \mapsto & g(P\cdot A)+\varepsilon\,|A|_2^2+\varepsilon\,|A|_2^4+ \\ & & & K\,|A-P\cdot A|_2^2 \end{array}$$

Šverák montre, en minorant la dérivée seconde de $f_{\varepsilon,K}$ dans la direction des matrices de rang 1, que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $K(\varepsilon) > 0$ tel que $f_{\varepsilon,K}$ soit rang-1-convexe. D'autre part il considère

$$\zeta(x) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \sin 2\pi x_1 \\ \sin 2\pi x_2 \\ \sin 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

et remarque que pour tout $x \in]0,1[^2$

$$D\zeta(x) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi x_2 \\ \cos 2\pi(x_1 + x_2) & \cos 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix} \in L$$

Ainsi

$$f_{\varepsilon,K}(D\zeta) = g(D\zeta) + \varepsilon\,|D\zeta|_2^2 + \varepsilon\,|D\zeta|_2^4$$

Or $|D\zeta|_2^2 \leq 4$ et $\int_{]0,1[^2} g(D\zeta) =$

$$-\int_{]0,1[^2} (\cos 2\pi x_1)^2 (\cos 2\pi x_2)^2 dx = -\frac{1}{4}$$

donc pour $0 < \varepsilon < 1/80$

$$\int_{]0,1[^2} f_{\varepsilon,K(\varepsilon)}(D\zeta) < 0$$

D'après le lemme 1, ceci prouve que $f_{\varepsilon,K(\varepsilon)}$ n'est pas quasiconvexe. On a ainsi le

Théorème 5. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $K > 0$ tels que $f_{\varepsilon,K}$ est rang-1-convexe mais pas quasiconvexe.*

Appendice : rappels d'analyse fonctionnelle

Tous les détails figurent dans le chapitre III de [4]. Citons seulement ce dont nous avons besoin ici.

Soit X un espace de Banach. Par définition une suite (u_k) d'éléments de X converge vers u pour la *topologie faible* si et seulement si

$$\langle h, u_k\rangle_{X'X} \to \langle h, u\rangle_{X'X}, \forall h \in X'$$

On notera alors $u_k \rightharpoonup u$.

Si X est un dual, on peut aussi définir la *topologie faible-∗* sur X : si $X = Y'$ alors par définition une suite (u_k) d'éléments de X converge vers u pour la *topologie faible-∗* si et seulement si

$$\langle u_k, y\rangle_{Y'Y} \to \langle u, y\rangle_{Y'Y}, \forall y \in Y$$

On notera alors $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$.

Ces topologies sont par construction **moins fines** que la *topologie forte* (c'est-à-dire la topologie d'espace vectoriel normé) : cela signifie qu'elles comportent **moins d'ouverts**. L'intérêt essentiel en est qu'elles ont par conséquent **plus de compacts**. On a notamment les deux résultats importants :

Théorème 6 (Kakutani). *Si X est réflexif (c'est-à-dire $X'' \simeq X$), alors toute boule fermée*

$$B = \{u \in X; \|u\|_X \leq M\}$$

est compacte pour la topologie faible (on dit encore faiblement compacte).

Théorème 7 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Si $X = Y'$, alors toute boule fermée*

$$B = \{u \in X; \|u\|_X \leq M\}$$

est compacte pour la topologie faible-∗.

Ces résultats sont spécialement intéressants lorsque X est de dimension infinie, car alors une boule fermée n'est jamais fortement compacte d'après le théorème de Riesz. Attention, dans le théorème 6, le caractère réflexif de X est aussi une condition nécessaire. C'est pourquoi on cherchera à identifier, si possible, un espace non réflexif à un dual (par exemple $L^\infty \simeq (L^1)'$), de manière à utiliser la topologie faible-∗.

Bibliographie

[1] J.M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. 64 (1977), p. 337–403

[2] J.M. Ball, *Strict convexity, strong ellipticity, and regularity in the calculus of variations*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 87 (1980), p. 501–513

[3] J.M. Ball, *Does rank one convexity imply quasiconvexity ?* In *Metastability and incompletely posed problems*, eds S. Antman et al. Springer-Verlag (1987), p. 17–32

[4] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson (1987)

[5] B. Dacorogna, *Weak continuity and weak lower semicontinuity of non-linear functionals*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag (1982)

[6] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, Springer-Verlag (1989)

[7] B. Dacorogna & P. Marcellini, *A counter example in the vectorial calculus of variations* In *Material instabilities in continuum mechanics*, ed. by J.M. Ball, Oxford Univ. Press (1988), p. 77–83

[8] J.-J. Alibert & B. Dacorogna, *An example of a quasiconvex function that is not polyconvex in two dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal. 117 (1992), p. 155–166

[9] L.C. Evans, *Weak convergence methods for nonlinear PDEs*, CBMS Reg. Conf. Ser. No 74, Amer. Math. Soc. 1990

[10] C.B. Morrey, *Quasiconvexity and the semicontinuity of multiple integrals*, Pacific J. Math. 2 (1952), p. 25–53

[11] C.B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer-Verlag (1966)

[12] D. Serre, *Formes quadratiques et calcul des variations*, J. Math. pures et appl. 62 (1983), p. 177-196

[13] V. Šverák, *Rank-one convexity does not imply quasiconvexity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 120 (1992), p. 185-189

◇ Sylvie Benzoni-Gavage
UMPA ENS–Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
benzoni@umpa.ens-lyon.fr