UE Calcul différentiel **Corrigé succinct de l'épreuve du 19 avril 2006**

La difficulté (relative) des exercices est signalée par des étoiles :
* facile, ** assez facile, *** assez difficile, **** difficile.

Exercice 1 . * Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables au point 1, alors l'application

$$\begin{array}{rrcl} F : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) := f(xy) + g(x/y) \end{array}$$

est différentiable en $(1,1)$ comme composée de $(x,y) \mapsto (xy, x/y)$, différentiable en $(1,1)$ car ses composantes le sont (la première composante étant polynomiale et la seconde une fonction rationnelle, dont le dénominateur est non nul en $y = 1$), et de $(u,v) \mapsto f(u) + g(v)$, somme de deux fonctions différentiables en $(1,1)$. De plus, on a d'après la formule de différentiation des fonctions composées

$$\mathrm{d}F_{(1,1)}(h,k) = (f'(1) + g'(1))\,h + (f'(1) - g'(1))\,k$$

quel que soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 . *** L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire habituel $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée $||.||$, si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n , \quad \langle u(x)\,,\, y \rangle = \langle x\,,\, u(y) \rangle ,$$

1. l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle x\,,\, u(x) \rangle$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ comme composée de l'application $x \mapsto (x, u(x))$ (dont les composantes $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et u sont linéaires continues, par hypothèse sur u) et de $(x,y) \mapsto \langle x\,,\, y \rangle$ (bilinéaire continue). De plus, d'après la formule de différentiation des fonctions composées, et puisque $\mathrm{d}u_x(y) = u(y)$,
$$\mathrm{d}f_x(y) = \langle x\,,\, u(y) \rangle + \langle y\,,\, u(x) \rangle = 2\,\langle u(x)\,,\, y \rangle$$
(d'après l'hypothèse de symétrie sur u et la symétrie du produit scalaire) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$.

2. Par composition de $x \mapsto (f(x), \|x\|^2)$ et de $(z,t) \mapsto z/t$, l'application $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \frac{f(x)}{\|x\|^2} = \frac{f(x)}{\langle x\,,\, x \rangle} ,$$
est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et
$$\mathrm{d}g_x(y) = \frac{\mathrm{d}f_x(y)}{\|x\|^2} - 2\,\frac{f(x)\langle x\,,\, y \rangle}{\langle x\,,\, x \rangle^2}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire encore, par définition de f, d'après la question 1 et par bilinéarité du produit scalaire :
$$\mathrm{d}g_x(y) = 2\,\frac{1}{\|x\|^2}\,\left\langle u(x) - \frac{\langle u(x)\,,\, x \rangle}{\|x\|^2}\,x\,,\, y \right\rangle .$$

3. D'après la formule ci-dessus, un vecteur $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est tel que $\mathrm{d}g_a = 0$ si et seulement si
$$u(a) = \frac{\langle u(a)\,,\,a\rangle}{\|a\|^2}\,a\,,$$
ce qui signifie exactement que a est un vecteur propre de u (pour la valeur propre $\frac{\langle u(a)\,,\,a\rangle}{\|a\|^2}$!).

Exercice 3 . ** Les fonctions

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) := (\,\mathrm{e}^{x-y}\,,\,x^2 + y^2\,,x\,y\,)\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g\ : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v,w) & \mapsto & g(u,v,w) := (\,u^2 + v^2 + w^2\,,\,u\,v\,w\,)\,. \end{array}$$

1. sont de classe $\mathscr{C}^1$ car leurs composantes (fonctions polynomiales et exponentielles) le sont.
2. Pour montrer que $g \circ f$ est un difféomorphisme local en $(1,1)$ il suffit, d'après le théorème d'inversion locale, de montrer que sa différentielle en $(1,1)$ est inversible. Or
$$\mathrm{d}(g \circ f)_{(1,1)} = \mathrm{d}g_{f(1,1)} \circ \mathrm{d}f_{(1,1)} = \mathrm{d}g_{(1,2,1)} \circ \mathrm{d}f_{(1,1)}$$
a pour matrice jacobienne le produit de la matrice jacobienne de $\mathrm{d}g_{(1,2,1)}$:
$$\mathrm{D}g_{(1,2,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
et de la matrice jacobienne de $\mathrm{d}f_{(1,1)}$:
$$\mathrm{D}f_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$
d'où
$$\mathrm{D}(g \circ f)_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\,,$$
dont le déterminant est $-24 \neq 0$.

Exercice 4 . **** L'application $\begin{array}{rccl} \Theta : & \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ & u & \mapsto & \Theta(u) := u \circ u\,. \end{array}$

1. est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{L}(E)$ comme composée de $u \mapsto (u,u)$ (dont les composantes sont $I_{\mathscr{L}(E)}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et a fortiori $\mathscr{C}^1$) et de $(u,v) \mapsto u \circ v$ (bilinéaire continue sur $\mathscr{L}(E)$).
2. D'après la formule de différentiation des fonctions composées,
$$\mathrm{d}\Theta_u(h) = u \circ h + h \circ u$$
pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $h \in \mathscr{L}(E)$.

3. D'après la formule ci-dessus,
$$\mathrm{d}\Theta_{I_E}(h) \,=\, 2\,h$$
c'est-à-dire que $\mathrm{d}\Theta_{I_E} \,=\, I_{\mathscr{L}(E)}$. Donc d'après le théorème d'inversion locale, Θ est un difféomorphisme local en I_E : il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de I_E et un voisinage $\mathscr{V}$ de $I_E \,=\, \Theta(I_E)$ tels que, pour tout $v \in \mathscr{V}$, il existe un unique $u \in \mathscr{U}$ pour lequel $v \,=\, \Theta(u)$. En prenant $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre I_E et de rayon ε soit incluse dans $\mathscr{V}$, on en déduit que pour tout $v \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $\|\, v \,-\, I_E \,\| \,<\, \varepsilon$, l'équation $u \circ u \,=\, v$ possède au moins une solution dans $\mathscr{L}(E)$ (et en fait une seule dans $\mathscr{U}$).
4. Les matrices
$$U \,:=\, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H \,:=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sont telles que
$$U H \,+\, H U \,=\, 0\,.$$
Par conséquent, d'après la formule donnant la différentielle de Θ, $\mathrm{d}\Theta_u(h) \,=\, 0$. S'il existait une fonction différentiable Ψ définie sur un voisinage $\mathscr{W}$ de I_E et à valeurs dans un voisinage de u dans $\mathscr{L}(E)$, telle que $\Psi(I_E) \,=\, u$ et $\Theta(\Psi(w)) \,=\, w$ pour tout $w \in \mathscr{W}$, on aurait par différentiation de la fonction $w \mapsto \Theta(\Psi(w)) \,-\, w$,
$$\mathrm{d}\Theta_u(\mathrm{d}\Psi_{I_E}(k)) \,=\, k$$
quel que soit $k \,\in\, \mathscr{L}(E)$. Donc $\mathrm{d}\Psi_{I_E}$ serait injective (la relation ci-dessus montrant que $\mathrm{d}\Psi_{I_E}(k) \,=\, 0 \quad \Rightarrow\, k \,=\, 0$) et par conséquent aussi surjective, puisque $\mathscr{L}(E)$ est de dimension finie dans cette question : on choisissant k tel que $\mathrm{d}\Psi_{I_E}(k) \,=\, h$ on en déduirait (grâce à l'égalité $\mathrm{d}\Theta_u(h) \,=\, 0$) que $k \,=\, 0$, et donc $h \,=\, 0$, ce qui est évidemment faux.

Exercice 5 . *** L'application
$$\begin{array}{rccl} f \,: & G \times F & \to & F \\ & (A, S) & \mapsto & f(A, S) \,:=\, (S + A)(S - A) - I_n \end{array}$$

1. est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de $(A, S) \mapsto (S + A, S - A)$ (linéaire continue) et de $(M, N) \mapsto\, MN \,-\, I_n$ (somme d'une application bilinéaire continue et d'une application constante). D'après la formule de différentiation des fonctions composées,
$$\mathrm{d}f_{(A,S)}(H, K) \,=\, (K + H)(S - A) \,+\, (S + A)(K - H)$$
pour tout $(A, S) \in G \times F$ et pour tout $(H, K) \in G \times F$.
2. D'après la formule ci-dessus, la différentielle partielle de f par rapport à S, est donnée par
$$\mathrm{d}_2 f_{(0_n, I_n)}(K) \,=\, 2\,K$$
quel que soit K, c'est-à-dire que $\mathrm{d}_2 f_{(0_n, I_n)} \,=\, 2\,I_F$: c'est donc clairement un isomorphisme de F.
3. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, $f(0_n, I_n) \,=\, 0_n$, et $\mathrm{d}_2 f_{(0_n, I_n)}$ est un isomorphisme, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de 0_n dans G, un voisinage $\mathscr{W}$ de I_n dans F, et une application $\varphi \,:\, \mathscr{V} \,\to\, \mathscr{W}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que, pour tout $(A, S) \in \mathscr{V} \times \mathscr{W}$, $f(A, S) \,=\, 0_n$ équivaut à $S \,=\, \varphi(A)$.

4. D'après les formules des questions 1 et 2, on voit que $\mathrm{d}\varphi_{0_n}(H) = 0_n$ quel que soit $H \in G$.
5. Quel que soit $M \in E$,
$$M = \frac{M - M^{\mathrm{t}}}{2} + \frac{M + M^{\mathrm{t}}}{2},$$
ce qui montre que $E = F + G$. Et on a clairement $F \cap G = \{0_n\}$. Donc $E = F \oplus G$.
6. Soit
$$\mathscr{U} = \{M = S + A\,;\, A \in \mathscr{V},\ S \in \mathscr{W}\}.$$
C'est un voisinage de I_n dans E et pour tout $M \in \mathscr{U}$, $M\,M^{\mathrm{t}} = I_n$ équivaut à
$$f\left(\frac{M - M^{\mathrm{t}}}{2}, \frac{M + M^{\mathrm{t}}}{2}\right) = I_n$$
avec $\frac{M-M^{\mathrm{t}}}{2} \in \mathscr{V}$ et $\frac{M+M^{\mathrm{t}}}{2} \in \mathscr{W}$. D'après la question 3, $M\,M^{\mathrm{t}} = I_n$ équivaut donc à
$$M = \frac{M - M^{\mathrm{t}}}{2} + \varphi\left(\frac{M - M^{\mathrm{t}}}{2}\right).$$