
THÉORÈME DE POINCARÉ-BENDIXSON

Serge Cantat

Introduction.

On présente ici une démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson et quelques questions qui lui sont liées. Ce théorème s'inscrit dans le cadre de la théorie qualitative des équations différentielles, il n'est donc pas surprenant d'y voir attaché le nom d'Henri Poincaré. Son énoncé donne l'existence de solutions périodiques pour des équations différentielles dans le plan.

1 Quelques notions-clefs.

Le but de ce paragraphe est d'introduire quelques notions fondamentales dans l'étude qualitative des équations différentielles. Tout est fait en dimension finie quelconque. Dans le paragraphe suivant on tentera au contraire de mettre en valeur les outils nouveaux qu'apporte le cas de la dimension deux.

1.1 Equations différentielles et flot.

Hypothèses générales : On s'intéresse ici à la description des solutions d'une équation différentielle du premier ordre autonome (c'est à dire en régime permanent, lorsque le champ de vitesse imposé ne dépend pas du temps). On peut l'écrire formellement :

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

ceci dans un ouvert Ω de $E = \mathbf{R}^n$, $n > 1$. La fonction f sera supposée continûment dérivable ; elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure l'existence et l'unicité de la solution maximale de (*) passant par tout point initial donné. L'unicité est un point-clef du théorème de Cauchy-Lipschitz ; elle nous apprend en particulier que pour un système autonome deux solutions ne peuvent se croiser ni une solution se couper elle même (sauf cas de périodicité).

Notion de flot : On suppose que les solutions sont définies sur toute la droite réelle, ceci quel que soit le point origine. Ce n'est pas contraignant dès que les orbites du système sont localisées dans un borné, ce qui est justement le cadre du théorème de Poincaré-Bendixson. On sait en effet qu'une trajectoire part à l'infini soit en temps, soit dans E .

Etant donné un point x appartenant à Ω on note $\phi_t(x)$ la position de x après un déplacement d'une durée t ($t \in \mathbf{R}$). L'application $\phi : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \Omega$ est appelée le flot (associé au champ f) et vérifie :

- (i) $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x))$
- (ii) $\phi_0(x) = x \quad \forall x \in \Omega$
- (iii) $\phi_{t+s} = \phi_t \phi_s$

(i) et (ii) signifient que $\phi_t(x)$ est la solution maximale qui passe par x à $t = 0$. (iii) est une nouvelle formulation du caractère autonome de (*) : au lieu de se déplacer pendant $t + s$ on peut le faire pendant t , aller prendre un café, revenir, et finir son bout de chemin pendant une durée s : entre-temps, le champ de vecteurs n'a pas été modifié.

Les deux dernières propriétés permettent de voir ϕ comme un groupe à un paramètre agissant sur Ω , l'inverse de ϕ_t étant ϕ_{-t} . Comme ϕ est une application de même classe que f (admis) on peut dire que l'on obtient un groupe à un paramètre de difféomorphismes. Pour étudier notre équation différentielle il « suffit » donc de considérer cette action de \mathbf{R} qui lui est sous-jacente.

REMARQUES. si l'on discrétise le temps en ne regardant l'évolution du système que seconde par seconde on obtient une action de \mathbf{Z} par difféomorphismes. Dans le cadre des systèmes dynamiques complexes par exemple, on itère des fractions rationnelles sur \mathbf{C} . En théorie ergodique on itère une transformation T préservant les volumes. Dans ces deux cas le temps est vu comme un groupe discret. Il peut être intéressant de généraliser cette notion en remplaçant le temps par un groupe quelconque, par exemple $SL(n, \mathbf{Z})$. Si le flot n'était pas complet, autrement dit, s'il existait des trajectoires définies seulement sur un intervalle strict de \mathbf{R} , on n'obtiendrait pas une action de groupe, mais de semi-groupe.

Cela étant dit, introduisons quelques notations : si x est un point de Ω on note $\gamma(x)$ la trajectoire issue de x et $\gamma^+(x)$ la demi trajectoire correspondant aux temps positifs :

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \{\phi_t(x), t \in \mathbf{R}\} \\ \gamma^+(x) &= \{\phi_t(x), t \in \mathbf{R}^+\} \end{aligned}$$

1.2 Ensembles invariants, ensembles limites.

DÉFINITION (ENSEMBLES INVARIANTS). Une partie A de Ω est dite positivement invariante si et seulement si : $\forall t > 0, \phi_t(A) \subset A$.

Une partie invariante piège donc les trajectoires : si une trajectoire rentre dans A , elle n'en sort plus. L'intérêt d'un tel ensemble est qu'on peut supposer $\Omega = A$ dès que l'on étudie l'évolution à l'infini d'une trajectoire qui y pénètre. Pour les systèmes dynamiques, les parties invariantes jouent le même rôle que les connexes en topologie élémentaire : on restreint un flot à une partie invariante comme une application continue à une composante connexe, l'étude sur chaque composante étant disjointe des autres.

Une trajectoire est un ensemble invariant, c'est l'exemple le plus simple d'un tel ensemble.

DÉFINITION (POINT D'ÉQUILIBRE). Un point x de Ω est dit point d'équilibre si le champ de vecteurs f s'y annule.

La notion de point d'équilibre est la même que celle de point critique pour le champ. On parle plutôt de point critique lorsque l'on regarde le champ pour lui même et de point d'équilibre lorsqu'on s'intéresse aux trajectoires. La trajectoire d'un point d'équilibre est confondue avec ce point, c'est donc un ensemble invariant.

DÉFINITION (ENSEMBLE LIMITE). Soit x un élément de Ω ; l'ensemble limite de x noté $\omega(x)$ est défini par :

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi_s(x), s \geq t\}}$$

La notation ω signifie que l'on regarde l'ensemble limite de x vers les temps positifs, pour les temps négatifs on aurait mis un α , conformément à l'orientation de l'alphabet grec. Quitte à inverser le temps les deux études sont similaires.

On pourrait aussi définir l'ensemble $\omega(x)$ de la manière suivante :

$$\omega(x) = \{y \in \Omega \mid \exists t_n \rightarrow \infty \quad \phi_{t_n}(x) \rightarrow y\}$$

En d'autres termes $\omega(x)$ est l'ensemble des points adhérents à $\gamma(x)$ au voisinage des temps infinis. C'est cet ensemble que l'on va étudier dans la suite, il est au centre du théorème de Poincaré-Bendixson.

L'exemple le plus simple d'ensemble limite est celui du point d'équilibre attractif : on dit qu'un point

d'équilibre est attractif si dans un voisinage toutes les trajectoires s'en rapprochent. Si on se donne un point x dans ce voisinage, l'ensemble limite de x est alors constitué par le point attractif. On peut définir le bassin d'attraction du point d'équilibre (ensemble des points dont l'ensemble limite est constitué du point d'équilibre) : c'est un ensemble invariant.

PROPRIÉTÉS (RELATIVES À L'ACTION DU FLOT).

soit x un point de Ω ;

(i) $\omega(x) = \omega(\phi_t(x)), \quad \forall t \in \mathbf{R}$

(ii) $\omega(x)$ est invariant sous le flot :

$$\forall y \in \omega(x), \forall t \in \mathbf{R} \quad \phi_t(y) \in \omega(x).$$

en particulier, si $y \in \omega(x)$ alors $\gamma(y) \subset \omega(x)$.

PROPRIÉTÉS (TOPOLOGIQUES). Si on suppose qu'il existe un compact D de Ω contenant $\gamma^+(x)$, alors :

(iii) $\omega(x)$ est un fermé non vide de Ω .

(iv) $\omega(x)$ est connexe.

Les démonstrations sont simples et laissées au lecteur. Pour (iii) et (iv) on utilise le fait que l'adhérence de $\{\phi_s(x), s \geq t\}$ est un connexe compact et qu'une intersection décroissante de tels ensembles est un compact connexe (la compacité est essentielle).

La première propriété permet de parler de l'ensemble limite d'une trajectoire (orientée), indépendamment du point initial choisi sur la courbe. Le point (ii) sera utilisé au cours de la preuve du théorème de Poincaré-Bendixson. Il affirme par exemple que (iii) et (iv) s'appliquent à tout point y de $\omega(x)$ si $\omega(x)$ est compact. Le point (iv) peut être renforcé de la manière suivante : si $\omega(x)$ est compact, c'est un connexe (exercice). Pour celui qui douterait de l'importance de la compacité on donne un exemple où cette hypothèse n'est pas vérifiée :

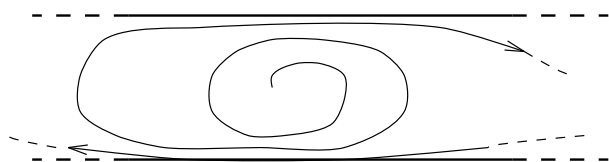


Figure 1: Un contreexemple

Les deux droites horizontales constituent l'ensemble limite de la trajectoire qui spirale. Cet ensemble n'est ni borné ni connexe.

1.3 Section locale, redressement du flot

Afin d'étudier l'ensemble limite d'une trajectoire on va devoir se munir d'une description locale du flot qui soit efficace. Ceci est fourni par le théorème de redressement du flot, valable au niveau d'un point régulier y ($f(y) \neq 0$). Remarquons déjà que quitte à changer $f(x)$ en $f(x+y)$ on peut supposer que l'étude se fait au voisinage de $y = 0$.

Un hyperplan H est dit transverse à f en 0 si $f(0) \notin H$. On a alors $\mathbf{R}.f(0) \oplus H = E$. Une section transverse S (pour f , en 0, associée à H) est alors un ouvert de H contenant 0 et sur lequel f reste transverse à H . Il en existe toujours. Pour simplifier on prendra toujours S difféomorphe à une boule. On obtient alors grace au théorème d'inversion locale :

THÉORÈME (DU REDRESSEMENT DU FLOT).

Soit f un champ tel que $f(0) \neq 0$ et H un hyperplan transverse à f en 0. Il existe alors un voisinage ouvert V de 0, un réel $\sigma > 0$ et un difféomorphisme $\psi : V \rightarrow D^{n-1} \times]-\sigma, \sigma[$ qui envoie $S = V \cap H$ sur D^{n-1} et les solutions de $dx/dt = f(x)$ sur les applications $t \mapsto (y, t)$.

Autrement dit, ψ redresse les trajectoires de f sur les verticales du cylindre $D^{n-1} \times]-\sigma, \sigma[$ parcourues à vitesse constante. En particulier, toute trajectoire qui coupe V la traverse en un temps 2σ ; ψ est donc une trivialisatoin de V (fibré par les morceaux de trajectoires qui le traverse) sur $D^{n-1} \times]-\sigma, \sigma[$. L'ouvert V est appelé une boîte à flot. Cela correspond à la figure 2.

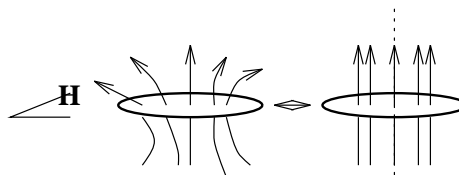


Figure 2: boîte à flot

Ce théorème nous permet de décrire localement les trajectoires du système dynamique. En particulier, si une trajectoire rentre dans V à t_0 elle coupe S en un point unique (proche de t_0) et ressort de la boîte à flot.

1.4 Section transverse et point limite.

Ce paragraphe n'est pas fondamental pour la suite mais il précise l'utilisation du théorème de redressement du flot.

Soit $x \in \Omega$ et $y \in \omega(x)$ un point de l'ensemble limite de x . On suppose que y est un point régulier de f ce qui nous permet d'utiliser le théorème de redressement du flot dont on garde les notations. Soit V une boîte à flot en y ; c'est un voisinage de y donc il existe au moins un point de la trajectoire de x qui appartienne à V . Soit x_0 un tel point ; on sait alors que la trajectoire coupe la section transverse de y en un point $\phi_{t_0}(x) = y_0$.

LEMME 1. Soit $t_0 > 0$ tel que $\phi_{t_0}(x) \in S$; il existe alors un unique $t_1 \geq t_0 + \sigma$ tel que :

$$\phi_{t_1}(x) \in S \quad \text{et} \quad \forall t \in]t_0, t_1[, \quad \phi_t(x) \notin S$$

DÉMONSTRATION. Comme $y \in \omega(x)$, il existe $s > t_0 + 10\sigma$ tel que $\phi_s(x) \in V$. Par continuité on peut donc considérer le plus petit $t > t_0$ tel que $\phi_t(x) \in S$. Il existe et est distinct de t_0 car : $\forall t \in]t_0, t_0 + \sigma[, \quad \phi_t(x) \notin S$ (cf ce qui a été dit ci-dessus). Par conséquent, t_1 existe, $\phi_t(x) \notin S$ si $t \in]t_0, t_1[$, et $t_1 \geq t_0 + \sigma$. ■

Par récurrence on construit ainsi une suite unique $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ tendant vers $+\infty$ telle que $y_i = \phi_{t_i}(x) \in S$ et $\{t_i\} = \{t \geq 0 : \phi_t(x) \in S\}$.

2 Le cas du plan, théorème de Poincaré-Bendixson.

2.1 Les avantages du plan.

Dans le plan deux phénomènes nouveaux apparaissent.

1) **simplicité des sections** : une section transverse est un segment de droite, donc un objet très simple muni d'un ordre naturel. On peut parler de monotonie le long d'une section.

2) **le théorème de Jordan** : il nous apprend qu'un arc fermé simple Γ sépare le plan en deux composantes connexes. $\mathbb{C} - \Gamma$ est ainsi divisé en deux régions, l'une bornée qu'on appelle l'intérieur de Γ , l'autre non bornée (devinez son p'tit nom). Nous n'aurons en fait besoin que du théorème de Jordan dans le cas des arcs C^1 par morceaux. La démonstration, plus simple que dans le cas général, se trouve dans [B-G]. Ce résultat permet d'affirmer qu'une courbe continue

qui se trouve à un instant dans Γ et ultérieurement en dehors coupe Γ en au moins un point.

2.2 Monotonie le long d'une section et le long d'une trajectoire

DÉFINITION (MONOTONIE). Soit x un point de Ω et $\gamma(x)$ sa trajectoire. On dit qu'une suite de points (y_n) de $\gamma(x)$ est monotone si $y_n = \phi_{t_n}(x)$ avec t_n monotone.

PROPOSITION. Soit S une section transverse et $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ des points de S situés sur une même trajectoire $\gamma(x)$. Alors si les points y_i sont monotones sur $\gamma(x)$ ils le sont sur S .

On a vu un exemple de tels points au paragraphe 1.4, lorsque les y_i sont les points de la trajectoire positive de x sur S .

DÉMONSTRATION. Quitte à inverser le temps il suffit de considérer les trois points y_0, y_1, y_2 et de montrer que y_2 ne se situe pas entre y_0 et y_1 . On peut en outre supposer que y_1 est le premier point qui coupe S après y_0 , et qu'il est directement suivi par y_2 . On a alors deux cas possibles donnés par les figures qui suivent.

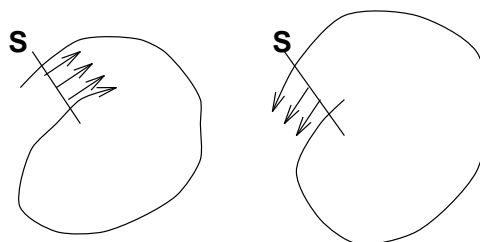


Figure 3:

On note P l'arc constitué par le segment $[y_0, y_1]$ et la partie de $\gamma(x)$ joignant y_0 à y_1 . Utilisant le théorème de redressement du flot on sait que $\gamma(x)$ sort ou rentre dans la composante connexe bornée de P après avoir coupé S en y_1 (cf. figures ci-dessus). Quitte à renverser le temps on peut supposer qu'elle en sort, ce qui correspond au dessin de droite.

Si y_2 est entre les deux autres points d'intersection le théorème de redressement du flot nous montre qu'auparavant la trajectoire de x se situait dans la composante bornée de $E - P$. Comme la trajectoire ne peut pas rentrer au niveau de S c'est que la courbe s'est coupée elle-même. Elle est donc périodique et les trois points considérés sont égaux. ■

COROLLAIRE 1. *Il ne peut pas y avoir deux points distincts (y_1, y_2) d'un ensemble limite $\omega(x)$ sur une même section.*

DÉMONSTRATION. Dans le cas contraire des points de la trajectoire de x se situeraient alternativement au voisinage de y_1 et y_2 et la monotonie serait contredite. ■

REMARQUES. On vient d'utiliser les deux arguments nouveaux de la dimension 2. Ils ne seront utilisés dans la suite que par référence à ce corollaire. Le théorème de Jordan est crucial. Le cas du tore de dimension 2 fournit un contre-exemple au théorème de Poincaré-Bendixson lorsque Jordan tombe en défaut. Cet exemple est traité au paragraphe 3.3.

2.3 Poincaré-Bendixson.

THÉORÈME 1 (POINCARÉ-BENDIXSON). *Un ensemble limite $\omega(x)$ non vide compact d'un système dynamique C^1 , du plan, qui ne contient pas de point d'équilibre est une orbite périodique.*

DÉMONSTRATION. On commence par exhiber une orbite périodique dans $\omega(x)$ puis on montre qu'il n'y en a pas d'autre.

1^{ère} étape Soit y un point de $\omega(x)$. Sa trajectoire positive $\gamma^+(y)$ est contenue dans le compact $\omega(x)$ donc admet au moins un point limite $z \in \omega(y)$. Comme $\omega(y) \subset \omega(x)$, z n'est pas un point d'équilibre. Il existe donc une section transverse S au niveau de z , coupée une infinité de fois par $\gamma^+(y)$. Par le corollaire énoncé ci dessus, ces points d'intersection sont tous confondus avec z et la trajectoire de y est périodique.

2^{ème} étape Il reste à prouver que $\omega(x)$ n'est constitué que de $\gamma(y)$. Si tel n'était pas le cas $\omega(x) - \gamma(y)$ serait un ouvert non vide de $\omega(x)$, qui ne peut pas être fermé par connexité de $\omega(x)$. Il y aurait donc un point d'accumulation z de $\omega(x) - \gamma(y)$ dans $\gamma(y)$. Prenant une section locale S en z ($f(z)$ est non nul par hypothèse) on voit que S doit contenir un point de $\omega(x) - \gamma(y)$ ce qui constitue une contradiction. ■

Le caractère C^1 du système est concentré dans le théorème de redressement du flot. La preuve proposée ici me semble donc plus élégante que celle donnée par Hirsch et Smale (cf. [H-S]). Cette dernière montre à la main que la distance de $\phi_t(x)$ à $\gamma(y)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Pour la deuxième étape on peut aussi montrer directement que toute orbite fermée de $\omega(x)$ est isolée dans $\omega(x)$, donc ouverte et

fermée ce qui est impossible (utiliser la compacité de l'orbite et le redressement du flot).

3 Applications, remarques.

3.1 Description des ensembles limites.

Le théorème de Poincaré-Bendixson permet de décrire tous les ensembles limites compacts d'un système dynamique plan. Deux cas se présentent, soit c'est une trajectoire périodique, soit c'est une union de points d'équilibres et de trajectoires reliant ces points (exercice), par exemple :

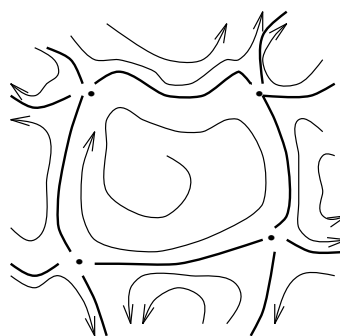


Figure 4: cas général.

La trajectoire centrale spirale vers un cycle de singularités à quatre points critiques. Ce type de portrait de phase ne survit pas à de petites perturbations du champ de vecteurs. Si on bouge un peu f on peut faire disparaître les trajectoires reliant deux points critiques.

3.2 Points d'équilibres.

Par le théorème de Jordan, une trajectoire périodique délimite un domaine invariant sous le flot : sa composante connexe bornée. Cette zone, Z , contient nécessairement un point d'équilibre pour le système ; en effet :

A l'aide du lemme de Zorn, on peut considérer une orbite périodique minimale γ dans Z (i.e. qui n'en contient pas d'autre), et supposer que la zone Z' qu'elle délimite n'a pas de point d'équilibre. Prenant un point z de Z' , son ensemble limite $\omega(z)$ est forcément égal à γ . Mais $\alpha(z)$ aussi, ce qui est impossible car γ ne peut pas se couper elle-même.

Les détails sont laissés au lecteur. Où utilise-t-on le théorème de Poincaré-Bendixson ?

3.3 Le cas de la sphère, du tore.

On peut tenter de généraliser le théorème de Poincaré-Bendixson au cas des surfaces. On développe ici le cas de la sphère et du tore.

Dans le cas de la sphère on peut appliquer tous les théorèmes utilisés, notamment celui de Jordan. Le théorème de Poincaré-Bendixson est donc vérifié. On a même un peu mieux puisque tout ensemble limite est nécessairement compact. On retrouve que tout champ continûment différentiable sur la sphère admet au moins un point critique (appliquer le paragraphe précédent.). Ceci permet d'obtenir le théorème de la boule de billard chevelue en approximant un champ de vecteurs continu par des champs réguliers et en extrayant une suite de points critiques convergente.

Dans le cas du tore, le théorème de Jordan est mis en défaut et le théorème de Poincaré-Bendixson ne survit pas à cette perte. Par exemple, une droite de pente irrationnelle dans \mathbf{R}^2 se projette densément sur le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$:

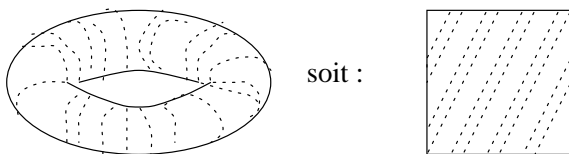


Figure 5: flot dense sur le tore.

3.4 Champ de vecteurs et feuilletages.

L'orientation des trajectoires joue un rôle fondamental dans la preuve du théorème de Poincaré-Bendixson. Ce paragraphe donne un contre exemple "lorsqu'on oublie l'orientation". On se donne donc les trajectoires (non orientées) et non pas le champ de vecteurs. On travaille sur la sphère ; les trajectoires sont données par recollement d'un même modèle sur chacun des hémisphères (moyennant une rotation d'angle irrationnel).

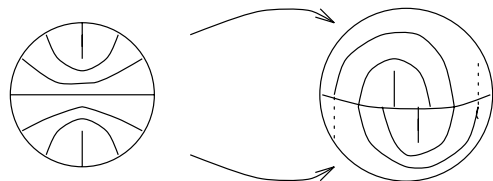


Figure 6:

On laisse au lecteur le soin de voir que toute trajectoire est dense. Il n'y a donc pas de trajectoire périodique.

Conclusion.

Le théorème de Poincaré-Bendixson est puissant mais se généralise mal. Toute la machinerie développée pour le démontrer est essentielle pour les systèmes dynamiques.

Le lecteur intéressé pourra trouver des développements dans [H-S] (application de premier retour de Poincaré), [P-M] (stabilité structurelle, voir le paragraphe 3.1 de cet article) et [I] (pour un exposé général qui complète bien [H-S]).

Bibliographie

- [B-G] M. Berger & B. Gostiaux, *Géométrie Différentielle*, Armand Colin, Paris 1972.
- [H-S] Hirsch & Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [I] M.C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems*, Academic Press, 2ème édition, 1987.
- [P-M] J. Palis & W.de Melo, *Introdução aos sistemas dinâmicos*, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.

◇ Serge Cantat
 ENS-Lyon
 46, allée d'Italie
 69364 Lyon cedex 7
 Serge.Cantat@ens.ens-lyon.fr