

Équations différentielles ordinaires

Sylvie Benzoni

26 mars 2005

1 Introduction

De nombreux modèles s'expriment au moyen d'équations différentielles ordinaires (en abrégé É.D.O.). L'adjectif *ordinaire* est surtout là pour faire la distinction entre les É.D.O. et les É.D.P. (*équations aux dérivées partielles*). En outre, il souligne la différence avec ce qu'on appelle les équations différentielles *fonctionnelles*, dont les plus connues sont les équations différentielles avec retard (apparaissant par exemple en démographie), et qui sortent du cadre de ce cours. Une équation différentielle ordinaire (d'ordre 1) est par définition de la forme

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

où l'inconnue u est à valeurs scalaires ou vectorielles¹, et la fonction f est au moins continue sur $I \times U$, où I est un intervalle de "temps" t et U est un ouvert de \mathbb{R}^n , tous deux non vides. Lorsque f ne dépend pas de t , l'équation différentielle est dite *autonome*.

En se promenant dans la galerie des modèles issus de domaines divers, on trouve parfois des analogies inattendues. Voici quelques portraits célèbres dans cette galerie, qui sont l'occasion d'introduire ou de rappeler quelques notions de base en modélisation.

1.1 Mécanique

Le modèle de base de la mécanique est la *loi de Newton*, équation différentielle du second ordre égalant l'accélération d'un point matériel à la résultante des forces exercées sur ce point :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x).$$

Cette équation n'est pas exactement de la forme générale précédente. Elle le devient si on la réécrit dans le *plan de phase*, en posant

$$v = \frac{dx}{dt},$$

que le lecteur averti reconnaîtra comme la vitesse du point considéré ! On obtient alors le système du premier ordre autonome :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(x). \end{cases}$$

¹Dans ce cas, on a plus précisément affaire à un *système* d'équations différentielles. On omettra souvent cette précision.

Des exemples de champs de force sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} F(x) = -kx \text{ avec } k > 0 & \text{(oscillateur harmonique)} \\ F(x) = -m(g/\ell) \sin x & \text{(pendule simple de longueur } \ell) \\ F(x) = \lambda(x)x \text{ avec } \lambda(x) \in \mathbb{R} & \text{(force centrale)} \\ F(x) = -\text{grad}V(x) & \text{(champ potentiel)} \end{array} \right.$$

Ce dernier exemple est fondamental, la quantité $V(x)$ s'interprétant comme l'énergie potentielle du point x . En particulier, pour une "petite" planète de masse m attirée par une "grosse" planète de masse M , la loi de la gravitation universelle fournit un champ de force central *et* potentiel, avec

$$V(x) = -\frac{GMm}{\|x\|}, \quad F(x) = -\frac{GMm}{\|x\|^3} x,$$

où G est la constante d'attraction universelle. Un champ de force potentiel est aussi dit *conservatif*, car l'énergie totale

$$E(x, v) := \frac{1}{2} m \|v\|^2 + V(x)$$

est conservée au cours du temps². On peut d'autre part réécrire la loi de Newton pour un champ potentiel sous une forme dite *Hamiltonienne*. En définissant :

$$H(q, p) = E(x, v), \quad q = x, \quad p = mv,$$

le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} \text{grad}V(x) \end{array} \right.$$

est clairement équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq}{dt} = \text{grad}_p H(q, p), \\ \frac{dp}{dt} = -\text{grad}_q H(q, p). \end{array} \right.$$

Les systèmes Hamiltoniens, c'est-à-dire de la forme ci-dessus, constituent une classe très importante d'équations différentielles, dont le Hamiltonien H est toujours une *intégrale première* (c'est-à-dire une constante le long des solutions).

1.2 Électricité

L'état d'un circuit électrique composé de résistances, bobines et condensateurs, peut être décrit par l'intensité I et la différence de potentiel U dans chacun de ces composants. Et les différentes lois de l'électricité montrent que cet état est régi par un système d'équations différentielles. Typiquement, pour un circuit fermé comprenant un composant de chaque sorte, dans l'ordre résistance-bobine-condensateur, la bobine ayant pour inductance L et le condensateur ayant pour capacité C , le comportement de la résistance étant régi par la loi d'Ohm généralisée (c'est-à-dire non-linéaire) :

$$U_R = F(I_R),$$

²Vérifier par dérivation de fonctions composées que $dE(x, v)/dt = 0$ si (x, v) satisfait la loi de Newton.

on a les équations différentielles :

$$\begin{cases} L \frac{dI_L}{dt} = U_L, \\ C \frac{dU_C}{dt} = I_C, \end{cases}$$

assorties des relations

$$U_C = U_L + U_R, \quad I_R = I_L = -I_C.$$

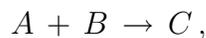
Notez qu'il y a de l'arbitraire dans l'orientation du circuit, mais les équations sont invariantes par changement d'orientation. En éliminant les autres inconnues, on se ramène à un système de deux équations pour $x = I_L$ et $y = U_C$ par exemple :

$$\begin{cases} L \frac{dx}{dt} = y - F(x), \\ C \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $F(x) = x^3 - x$, ce système est connu sous le nom d'équation de van der Pol, sur laquelle il est classique d'illustrer le théorème de Poincaré-Bendixon que nous verrons plus loin.

1.3 Chimie

L'évolution d'une réaction chimique simple



dont les réactants A et B et le produit C ont pour concentration a , b et c respectivement peut également être modélisée par une équation différentielle, en égalant le taux de consommation :

$$-\frac{da}{dt} = -\frac{db}{dt} = \frac{dc}{dt}$$

avec le taux de réaction, supposé de la forme

$$K a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

où K , α , β , γ sont des constantes empiriques. Le même raisonnement s'applique à des réactions plus complexes. En particulier, l'évolution de la réaction dite de Belousov est régie par le modèle de Field-Noyes (adimensionné) :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = qy - xy + x(1-x), \\ \delta \frac{dy}{dt} = -qy - xy + 2rz \\ \frac{dz}{dt} = x - z, \end{cases}$$

où ε , δ , q et r sont des paramètres sans dimension. Ce modèle admet des solutions périodiques qui ont longtemps laissé les experts sceptiques quant à sa validité, car elles leur semblaient en contradiction avec le second principe de la thermodynamique. Le travail de Belousov, poursuivi par Zhabotinskii, n'a été reconnu qu'après sa mort !

1.4 Écologie

Divers modèles classiques d'évolution d'espèces en compétition s'expriment au moyen d'équations différentielles. C'est le cas des modèles de type *prédateurs-proies* de Lotka–Volterra. Si une population de proies de concentration N cohabite avec une population de prédateurs de concentration P , un modèle simplifié de leur évolution s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(a - bP), \\ \frac{dP}{dt} = P(cN - d), \end{cases}$$

où a , b , c et d sont des constantes empiriques positives. Ce système admet l'intégrale première :

$$H(N, P) = cN - d \ln N + bP - a \ln P.$$

Un modèle plus réaliste serait complètement non-linéaire :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N F(N, P), \\ \frac{dP}{dt} = P G(N, P). \end{cases}$$

2 Résolution théorique du problème de Cauchy

2.1 Préliminaire

On utilise abondamment dans la théorie des équations différentielles le lemme (ou l'inégalité) de Gronwall. Parfois, on appelle (à tort) lemme de Gronwall le fait suivant : si une fonction u de classe \mathcal{C}^1 satisfait une inégalité différentielle du type :

$$u'(t) \leq b(t) + a(t)u(t), \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

alors

$$u(t) \leq e^{\int_0^t a(s) ds} u(0) + \int_0^t b(\tau) e^{\int_\tau^t a(s) ds} d\tau, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

En effet, l'inégalité différentielle implique

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\int_0^t a(s) ds} u(t) \right) \leq e^{-\int_0^t a(s) ds} b(t),$$

et donc par intégration entre 0 et t on obtient immédiatement l'inégalité annoncée. Le lemme de Gronwall est un peu plus subtil, puisqu'il suppose une inégalité intégrale et non une inégalité différentielle (la seconde impliquant la première mais pas l'inverse). Or les *estimations a priori* que l'on obtient en général sont plutôt du type intégral, d'où l'intérêt de ce lemme, dont la preuve est néanmoins élémentaire.

Lemme 1 (Gronwall) Si $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^+)$ est telle qu'il existe a et $b \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^+)$ avec

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(\tau) u(\tau) \, d\tau, \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

alors

$$u(t) \leq b(t) + \int_0^t b(\tau) a(\tau) e^{\int_\tau^t a(s) \, ds} \, d\tau, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Dém. La seule astuce consiste à majorer l'intégrale du second membre

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) u(\tau) \, d\tau$$

par la méthode décrite précédemment. Comme

$$v'(t) = a(t) u(t) \leq a(t) (b(t) + v(t))$$

par hypothèse³, on a donc

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\int_0^t a(s) \, ds} v(t) \right) \leq e^{-\int_0^t a(s) \, ds} a(t) b(t),$$

d'où après intégration (notez que $v(0) = 0$ par définition) :

$$v(t) \leq \int_0^t a(\tau) b(\tau) e^{\int_\tau^t a(s) \, ds} \, d\tau, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

En majorant de cette façon $v(t)$ dans l'inégalité de départ, on obtient le résultat. \square

Cette version du lemme de Gronwall est donnée surtout pour mettre en évidence la méthode de calcul. On pourrait donner une autre version de l'inégalité obtenue, en intégrant par parties si b est dérivable :

$$u(t) \leq b(0) e^{\int_0^t a(s) \, ds} + \int_0^t b'(\tau) e^{\int_\tau^t a(s) \, ds} \, d\tau, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

En particulier, si b est constante, on obtient simplement :

$$u(t) \leq b e^{\int_0^t a(s) \, ds}.$$

En pratique, il est conseillé de refaire rapidement le calcul pour éviter les erreurs.

2.2 Existence et unicité locale

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) On suppose f de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times U$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U est un ouvert de \mathbb{R}^n . Quel que soit $(t_0, u_0) \in I \times U$, il existe $\tau > 0$ et un unique $u \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; U)$ tel que

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \text{pour tout } t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau], \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

³Attention, ici intervient de façon cruciale le fait que a soit positive !

Remarque 1 L'hypothèse optimale est en fait que f soit continue sur un voisinage de (t_0, u_0) dans $I \times U$ et localement lipschitzienne par rapport à u . Si f est seulement continue, on a l'existence (théorème de Cauchy-Arzela-Peano) mais pas l'unicité.

Remarque 2 Le théorème est vrai en remplaçant \mathbb{R}^n par un espace de Banach X . Par exemple, X peut être un espace de suites $\ell^p(\mathbb{Z})$. Dans ce cas, on parle d'équation différentielle sur le réseau \mathbb{Z} (Lattice Dynamical System en anglais). Attention, lorsque f est seulement continue sur $I \times X$, on n'a pas d'équivalent du théorème de Cauchy-Arzela-Peano (il y a des contre-exemples).

Dém. Il existe de nombreuses manières de démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz, utilisant divers théorèmes du point fixe. Il peut être utile de connaître une démonstration directe, dont le "squelette" se retrouve dans la résolution du problème de Cauchy pour certaines É.D.P. Pour simplifier les écritures (c'est-à-dire en fait, éviter quelques valeurs absolues), on va faire cette démonstration en remplaçant l'intervalle centré $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ par $[t_0, t_+]$ avec $t_+ = t_0 + \tau > t_0$ (le cas de l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$ s'en déduisant par un changement de variable de la forme $t \mapsto \alpha(t_0 - t)$).

L'étape 0 consiste à choisir ce qu'on appelle parfois (pompeusement) un *cylindre de sécurité*

$$C(t_+, R) = [t_0, t_+] \times \bar{B}(u_0, R) \subset I \times U$$

avec $t_+ > t_0$ et $R > 0$, où $\bar{B}(u_0, R)$ désigne la boule fermée de centre u_0 et de rayon R . Comme f est continue, elle est bornée sur le compact⁴ $C(t_+, R)$, disons par une constante M . D'autre part, on a également une constante de Lipschitz⁵ L telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad \text{pour tous } t \in [t_0, t_+], x \text{ et } y \in \bar{B}(u_0, R).$$

La nœud de la démonstration consiste alors à réécrire le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

sous la forme intégrale :

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) \, d\tau,$$

et à chercher une solution comme limite de la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u^0 = u_0, \quad u^{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u^n(\tau)) \, d\tau.$$

L'étape 1 est très facile. Elle consiste à vérifier que pour t_+ assez proche de t_0 , la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie dans $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(u_0, R)$. En effet, la fonction u^0

⁴Ici on utilise (abusivement) la dimension finie; dans un espace de Banach on prendrait un "petit" cylindre c'est-à-dire t_+ assez proche de t_0 , ce que l'on fera de toutes façons, et R assez petit pour assurer une borne pour f .

⁵À nouveau, dans un Banach on aurait cette constante pourvu que $C(t_+, R)$ soit assez petit.

constante est bien à valeurs dans $\bar{B}(u_0, R)$. Supposons qu'on ait construit u^n continue sur $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(u_0, R)$. Alors u^{n+1} est bien définie et de plus :

$$\|u^{n+1}(t) - u_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, u^n(\tau))\| d\tau \leq (t_+ - t_0) M.$$

Donc il suffit que

$$(t_+ - t_0) M \leq R$$

pour que u^{n+1} soit aussi à valeurs dans $\bar{B}(u_0, R)$.

L'étape 2 est de montrer que, quitte à diminuer t_+ , la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([t_0, t_+]; \mathbb{R}^n)$ (muni de la norme uniforme). Pour $n \geq 1$ on a

$$\|u^{n+1}(t) - u^n(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, u^n(\tau)) - f(\tau, u^{n-1}(\tau))\| d\tau \leq (t_+ - t_0) L \sup_{[t_0, t_+]} \|u^n - u^{n-1}\|.$$

Donc, par exemple si t_+ est tel que

$$(t_+ - t_0) L \leq \frac{1}{2}$$

on a par une récurrence immédiate :

$$\sup_{[t_0, t_+]} \|u^{n+1} - u^n\| \leq \frac{1}{2^n} \sup_{[t_0, t_+]} \|u^1 - u^0\|.$$

On en déduit aisément que la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

L'étape 3 est quasi-immédiate. Il faut vérifier que la limite u est solution de notre problème. Or, par passage à la limite dans l'égalité

$$u^{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u^n(\tau)) d\tau$$

on voit que

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Comme u est continue ainsi que f , le second membre de cette égalité est de classe \mathcal{C}^1 et donc u aussi⁶ et elle vérifie :

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_+].$$

Ceci achève la preuve de l'existence⁷ d'une solution.

La preuve de l'unicité est très facile grâce au lemme de Gronwall. En effet, si u et v sont deux solutions du même problème de Cauchy sur $[t_0, t_+]$ et à valeurs dans $\bar{B}(u_0, R)$, on a

$$u(t) - v(t) = \int_{t_0}^t (f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))) d\tau.$$

⁶Plus généralement, si f est de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 0$, u est de classe \mathcal{C}^{r+1} .

⁷Nous avons bien entendu utilisé la lipschitzianité de f ; dans le cas où f est seulement continue, la preuve est plus difficile car elle repose sur le théorème d'Ascoli.

et donc

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau.$$

Par conséquent, une version simplissime du lemme de Gronwall implique :

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{Lt} \|u(t_0) - v(t_0)\| = 0$$

pour tout $t \in [t_0, t_+]$. □

2.3 Solutions maximales

Le théorème 1 fournit des solutions locales. L'unicité de ces solutions permet de démontrer le résultat suivant.

Lemme 2 (dit de recollement) *Sous les hypothèses du théorème 1, si $u_1 \in \mathcal{C}^1(J_1; U)$ et $u_2 \in \mathcal{C}^1(J_2; U)$ sont deux solutions sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement, et s'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors*

$$u_1(t) = u_2(t), \quad \text{pour tout } t \in J_1 \cap J_2.$$

Dém. C'est une application classique de la notion de *connexité*. On remarque que $J_1 \cap J_2$ est un intervalle non vide par hypothèse et on considère l'ensemble :

$$A = \{t \in J_1 \cap J_2; u_1(t) = u_2(t)\}.$$

D'après l'unicité locale des solutions, A est un ouvert. De plus, il est clairement fermé par continuité de u_1 et u_2 . Donc A est égal à $J_1 \cap J_2$. □

Ce lemme montre que le prolongement d'une solution locale est unique, et permet ainsi de définir une unique solution du problème de Cauchy dite *maximale*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas prolonger au delà d'un intervalle J ouvert dans I . Lorsque $J = I$ on dira que cette solution est *globale*.

On appelle *trajectoire* la courbe décrite dans \mathbb{R}^n par une solution maximale.

2.4 Explosion des solutions

La question naturelle est ensuite de savoir à quelle(s) condition(s) une solution maximale est globale.

Théorème 2 (dit des bouts) *Sous les hypothèses du théorème 1, soit $u \in \mathcal{C}^1(J; U)$ une solution maximale. Notons b la borne supérieure de I et β la borne supérieure de J . Alors ou bien $\beta = b$ ou bien "u sort de tout compact" de U , c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset U$, il existe $\eta < \beta$ tel que*

$$u(t) \in U \setminus K, \quad \text{pour } t \geq \eta \text{ avec } t \in J.$$

Et on a le résultat analogue pour les bornes inférieures.

Dém. Supposons $\beta < b$ et raisonnons par l'absurde. S'il existait un compact K et une suite t_n tendant vers β telle que $u(t_n) \in K$ pour tout n , quitte à en extraire une sous-suite, on pourrait supposer qu'elle converge vers $u_0 \in K$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $\tau > 0$ (dépendant seulement de K) tel que le problème de Cauchy en t_n admette une solution unique, qui coïncide donc avec u , sur l'intervalle $[t_n, t_n + \tau]$. Or pour n assez grand, on aura $t_n + \tau > \beta$. Ceci contredit le fait que u soit une solution maximale. \square

En particulier, lorsque $U = \mathbb{R}^n$, ce théorème signifie qu'une solution maximale sur un intervalle $] \alpha, \beta [$ strictement inclus dans I vérifie

$$\lim_{t \nearrow \beta} \|u(t)\| = +\infty, \quad \lim_{t \searrow \alpha} \|u(t)\| = +\infty.$$

Un prototype d'équation différentielle dont les solutions "explosent" ainsi en temps fini est l'équation de *Riccati* :

$$\frac{du}{dt} = u^2.$$

Bien que le second membre soit extrêmement régulier, cette équation n'admet pas de solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ autre que la solution nulle. En effet, le problème de Cauchy associé à une donnée $u(t_0) = u_0 \neq 0$ se résout explicitement par séparation des variables en :

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} + (t_0 - t)},$$

qui admet évidemment une singularité en $t = t_0 + 1/u_0$. Si $u_0 > 0$, la solution maximale est définie sur $] -\infty, t_0 + 1/u_0 [$, et si $u_0 < 0$, la solution maximale est définie sur $] t_0 + 1/u_0, +\infty [$.

2.4.a Cas des équations différentielles "linéaires"

Une conséquence facile du lemme 1 et du théorème 2 est que les équations "linéaires", de la forme

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + b(t),$$

avec A et b continues sur I n'admettent que des solutions globales, c'est-à-dire définies sur I tout entier. Les guillemets sont là à cause du terme $b(t)$, aussi appelé *terme source* (ou forçage). Les "vraies" équations différentielles linéaires sont de la forme

$$\frac{du}{dt} = A(t)u,$$

souvent appelées équations différentielles linéaires *homogènes*.

C'est un exercice classique de montrer l'existence de solutions globales pour les équations différentielles linéaires grâce au théorème de point fixe suivant :

Théorème 3 *Soit \mathcal{T} un opérateur sur un espace de Banach dont une puissance est contractante. Alors \mathcal{T} admet un point fixe unique.*

Dém. Ce résultat est une conséquence facile du théorème de point fixe de Banach-Picard. Par hypothèse, il existe un entier k tel que \mathcal{T}^k soit contractant et donc admette un point fixe unique u . Alors

$$\mathcal{T}^k(\mathcal{T}(u)) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^k(u)) = \mathcal{T}(u).$$

Donc $\mathcal{T}(u)$ est aussi un point fixe de \mathcal{T}^k . À cause de l'unicité de ce point fixe on a ainsi $\mathcal{T}(u) = u$. De plus, tout point fixe de \mathcal{T} étant évidemment un point fixe de \mathcal{T}^k , u est l'unique point fixe de \mathcal{T} . \square

On peut en particulier utiliser ce théorème dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ quels que soient a et b tels que $[\alpha, \beta] \subset I$. Pour résoudre le problème de Cauchy de donnée "initiale" $u(t_0) = u_0$ ($t_0 \in]a, b[$), on cherche u tel que

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(s)u(s) + b(s)) ds$$

c'est-à-dire de façon équivalente

$$u(t) = v(t) + u_0, \quad \text{avec} \quad v(t) = \int_{t_0}^t (A(s)(v(s) + u_0) + b(s)) ds.$$

Pour simplifier, on suppose (sans perte de généralité, il suffit de translater toutes les fonctions en jeu) $t_0 = 0$. Définissons alors l'opérateur :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n) \\ v &\mapsto \mathcal{T}v; (\mathcal{T}v)(t) = \int_0^t (A(s)(v(s) + u_0) + b(s)) ds. \end{aligned}$$

Quels que soient v et w dans $\mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ on a

$$(\mathcal{T}v)(t) - (\mathcal{T}w)(t) = \int_0^t A(s)(v(s) - w(s)) ds$$

et donc

$$\|(\mathcal{T}v)(t) - (\mathcal{T}w)(t)\| \leq Ct \max_{s \in [0, t]} \|v - w\|, \quad \text{avec} \quad C := \max_{s \in [\alpha, \beta]} \|A(s)\|.$$

Montrons par récurrence que

$$\|(\mathcal{T}^n v)(t) - (\mathcal{T}^n w)(t)\| \leq C^n \frac{t^n}{n!} \max_{s \in [0, t]} \|v - w\|$$

pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. C'est vrai à l'ordre 1 comme on vient de le voir. Supposons l'inégalité vraie à l'ordre n . Alors

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}^{n+1}v)(t) - (\mathcal{T}^{n+1}w)(t)\| &= \|\mathcal{T}((\mathcal{T}^n v)(t)) - \mathcal{T}((\mathcal{T}^n w)(t))\| \\ &\leq C \int_0^t \|(\mathcal{T}^n v)(s) - (\mathcal{T}^n w)(s)\| ds \leq C \max_{s \in [0, t]} \|v - w\| \int_0^t C^n \frac{s^n}{n!} ds \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. En évaluant l'intégrale on obtient immédiatement l'inégalité à l'ordre $n + 1$:

$$\|(\mathcal{T}^{n+1}v)(t) - (\mathcal{T}^{n+1}w)(t)\| \leq C^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \|v - w\|.$$

Par conséquent, on a

$$\|\mathcal{T}^n v - \mathcal{T}^n w\| \leq C^n \frac{(\beta - \alpha)^n}{n!} \|v - w\|$$

quels que soient v et w . Or il existe n_0 tel que $C^n \frac{T^n}{n!} < 1$ pour $n \geq n_0$. Donc \mathcal{T}^n est contractant pour $n \geq n_0$ et d'après le théorème 3, \mathcal{T} admet un point fixe unique.

On sera amené plus loin à comparer les solutions de deux équations différentielles linéaires. C'est pourquoi nous montrons ici le

Lemme 3 Si u_i pour $i = 1, 2$ sont solutions d'équations différentielles linéaires homogènes :

$$\frac{du_i}{dt} = A_i(t)u_i,$$

avec A_i continues sur $[-T, T]$, satisfaisant la même condition initiale $u_i(0) = u_0$ alors on a l'estimation :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq b(T) \|u_0\| |t| e^{|t|a(T)}$$

pour tout $t \in [-T, T]$, où $a(T)$ est un majorant de $\|A_1\|$ et de $\|A_2\|$, et $b(T)$ est un majorant de $\|A_1 - A_2\|$ sur $[-T, T]$.

Dém. En soustrayant les égalités

$$u_i'(t) = A_i(t)u_i(t),$$

et en intégrant entre 0 et t on obtient par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\| &\leq \int_0^t \|A_2(s)(u_1(s) - u_2(s))\| ds \\ &\quad + \int_0^t \|(A_1(s) - A_2(s))u_1(s)\| ds \\ &\leq \max_{[0, T]} \|A_2\| \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds \\ &\quad + \max_{[0, T]} \|A_1 - A_2\| \int_0^t \|u_1(s)\| ds \end{aligned}$$

pour $t \in [0, T]$. Or, comme

$$\|u_1(t)\| \leq \|u_0\| + \max_{[0, T]} \|A_1\| \int_0^t \|u_1(s)\| ds,$$

on a par le lemme de Gronwall :

$$\|u_1(t)\| \leq e^{t a_1(T)} \|u_0\|,$$

où $a_1(T) := \max_{[0, T]} \|A_1\|$. Par suite, en notant aussi $a_2(T) := \max_{[0, T]} \|A_2\|$, et $b(T) := \max_{[0, T]} \|A_1 - A_2\|$, on a :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \int_0^t (a_2(T) \|u_1(s) - u_2(s)\| + b(T) e^{s a_1(T)} \|u_0\|) ds$$

pour tout $t \in [0, T]$. En appliquant à nouveau le lemme de Gronwall, on en déduit

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq b(T) \|u_0\| \int_0^t e^{s a_1(T)} e^{(t-s) a_2(T)} ds \leq b(T) \|u_0\| t e^{t \max(a_1(T), a_2(T))}.$$

Le calcul sur $[-T, 0]$ est bien sûr analogue. □

Remarque 3 *Il est tentant d'écrire les solutions d'une équation linéaire*

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

au moyen de l'exponentielle de matrices. Attention, c'est possible exclusivement si toutes les matrices $A(t)$ commutent entre elles, ce qui est fort peu probable en dehors des cas particuliers suivants :

Cas scalaire : *si $n = 1$, les matrices $A(t)$ sont en fait des scalaires $a(t)$. Dans ce cas, les solutions s'écrivent :*

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} u(t_0).$$

Cas à coefficients constants : *pour tout t , $A(t) = A$ est indépendant de t . Alors les solutions s'écrivent :*

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u(t_0).$$

2.4.b Cas des équations différentielles autonomes

On peut appliquer la théorie générale aux équations différentielles autonomes avec $I = \mathbb{R}$. En particulier, une solution est globale si elle est définie sur \mathbb{R} tout entier.

Les trajectoires d'une équation différentielle autonome

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

sont aussi appelées *courbes intégrales* du champ de vecteurs f . Par définition, ce sont des courbes tangentes à $f(u)$ en tout point $u \in U$.

Définition 1 *Un champ de vecteurs $f \in \mathcal{C}(U)$ est dit complet si toutes ses courbes intégrales sont globales, c'est-à-dire si toutes les solutions maximales de l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

sont définies sur \mathbb{R} .

Il existe bien sûr des champs qui ne sont *pas complets*. Par exemple, le champ réel $f(u) = u^2$ de l'équation de Riccati n'est pas complet.

Un critère commode pour montrer qu'un champ est complet est le suivant.

Théorème 4 *Supposons que pour tout intervalle ouvert borné J , toute solution $u \in \mathcal{C}^1(J; U)$ de*

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

soit à valeurs dans un compact K_J de U . Alors le champ f est complet.

Dém. C'est une conséquence un peu subtile du théorème 2 (le problème étant que K_J peut *a priori* dépendre dangereusement du diamètre de J), que nous allons en fait appliquer à un système (équivalent) *augmenté*⁸.

⁸C'est une technique souvent efficace d'ajouter une équation différentielle triviale, voir aussi la remarque 4 ou le théorème 6 ci-après.

Soit $u \in \mathcal{C}(J; U)$ une solution maximale de

$$\frac{du}{dt} = f(u).$$

Alors l'application $s \in J \mapsto (u, t) = (u(s), s)$ est une solution maximale du système augmenté :

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = f(u), \\ \frac{dt}{ds} = 1. \end{cases}$$

Supposons que $\beta = \sup J$ et $\alpha = \inf J$ soient finis. Choisissons $T > \max(\beta, -\alpha)$. D'après le théorème 2, la solution maximale (u, t) du système augmenté doit sortir du compact $K_J \times [-T, T]$. Comme u reste dans K_J , c'est que t sort de l'intervalle $[-T, T]$ et donc de J ; ce qui est absurde puisque $t = s \in J$.

Donc l'une au moins des bornes de J est infinie. Et en fait les deux le sont. On s'en convainc aisément en reprenant la démonstration du théorème des bouts : si on avait par exemple $J =]-\infty, \beta[$ avec $\beta < +\infty$, alors, pour tout $\gamma < \beta$ et $T > \max(\beta, -\gamma)$, la solution $(u, t) \in \mathcal{C}^1(] \gamma, \beta[)$ du système augmenté devrait sortir du compact $K_{] \gamma, \beta[} \times [-T, T]$ lorsque $s \nearrow \beta$, ce qui est impossible. \square

Un exemple important d'application de ce théorème est à la mécanique.

Proposition 1 *Si V est une fonction positive, le champ $(x, v) \mapsto (v, -\text{grad}V(x))$ est complet.*

Dém. Rappelons en effet que

$$E(x, v) = \frac{1}{2} m \|v\|^2 + V(x)$$

est une intégrale première du champ considéré. D'après l'hypothèse de positivité de V on a donc le long de toute solution

$$\frac{1}{2} m \|v(t)\|^2 \leq E(x(t), v(t)) = E(x(0), v(0)),$$

et comme $x(t) = x(0) + \int_0^t v(s) ds$, on a

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| + T \sqrt{2E(x(0), v(0))/m}$$

pour $t \in]-T, T[$. Donc $(x(t), v(t))$ est bornée sur $] - T, T[$, ce qui montre qu'elle prend ses valeurs dans un compact (nous sommes ici en dimension finie). \square

Ce type de raisonnement, permettant de passer de solutions locales à des solutions globales au moyen d'*estimations a priori*, est très courant dans la théorie des équations différentielles, et au delà dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Remarque 4 *L'étude des équations différentielles autonomes est d'autant plus fondamentale que toute équation différentielle*

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

peut se ramener à une équation autonome. En effet, il suffit de considérer le système (équivalent) augmenté :

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = f(t, u), \\ \frac{dt}{ds} = 1. \end{cases}$$

2.5 Dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales

Connaissant l'existence et l'unicité des solutions, la question naturelle du point de vue de la modélisation est leur dépendance par rapport aux conditions initiales. Il est très facile de voir que cette dépendance est continue, et même Lipschitzienne.

Lemme 4 *On suppose f de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times U$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U est un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $(t_0, u_0) \in I \times U$ et $R > 0$ tel que $\bar{B}(u_0, R) \subset U$. Alors il existe $\tau > 0$ et $C > 0$ tel que pour tous v_1 et $v_2 \in \bar{B}(u_0, R/2)$, les solutions u_1 et u_2 des problèmes de Cauchy pour l'équation*

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

et les données initiales $u_i(t_0) = v_i$ soient définies sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ et vérifient l'estimation :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C \|v_1 - v_2\|.$$

Dém. En adaptant légèrement la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz, on voit que, si M est une borne de f et L une constante de Lipschitz de f sur le cylindre $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(u_0, R) \subset I \times U$, alors pour tout $v \in \bar{B}(u_0, R/2)$ on peut construire une solution du problème de Cauchy de donnée initiale v qui soit à valeurs dans $\bar{B}(v, R/2)$ (et donc dans $\bar{B}(u_0, R)$ par l'inégalité triangulaire !) pour

$$|t - t_0| \leq \min(T, \frac{R}{2M}, \frac{1}{2L}) =: \tau$$

L'estimation de la différence entre deux solutions est une application du lemme de Gronwall à peine plus élaborée que la preuve de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. En faisant la différence des deux relations :

$$u_i(t) = v_i + \int_{t_0}^t f(\tau, u_i(\tau)) \, d\tau,$$

on obtient l'inégalité :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|v_1 - v_2\| + L \int_{t_0}^t \|u_1(s) - u_2(s)\| \, ds$$

pour $t \geq t_0$, d'où par le lemme 1 :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq e^{L\tau} \|v_1 - v_2\|$$

pour $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$. □

En fait, on a beaucoup mieux.

Théorème 5 (dit du flot) On suppose f de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times U$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U est un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $(t_0, u_0) \in I \times U$. Il existe un voisinage $\mathcal{W} \times \mathcal{V}$ de (t_0, u_0) dans $I \times U$ et une unique application $\phi^{t_0} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{W} \times \mathcal{V}; U)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi^{t_0}}{\partial t}(t, v) = f(t, \phi^{t_0}(t, v)), & \text{pour tout } (t, v) \in \mathcal{W} \times \mathcal{V}, \\ \phi^{t_0}(t_0, v) = v, & \text{pour tout } v \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

La fonction ϕ^{t_0} est appelée *flot* (local) au point t_0 de l'équation différentielle. En particulier, ce théorème affirme que pour toute donnée initiale v proche de u_0 l'application $u : t \mapsto \phi^{t_0}(t, v)$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \text{pour tout } t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau], \\ u(t_0) = v, \end{cases}$$

et qu'en plus elle dépend de manière \mathcal{C}^1 de v . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira simplement ϕ au lieu de ϕ^{t_0} .

La démonstration du théorème 5 repose sur le calcul suivant, formel pour l'instant. Supposons que l'on ait construit ϕ et que l'on puisse dériver l'égalité

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, v) = f(t, \phi(t, v))$$

par rapport à v . Désignons par D la différentiation par rapport aux vecteurs de \mathbb{R}^n , et soit $\psi(t, v) = D\phi(t, v)$ (par définition, c'est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , qui s'identifie avec une matrice $n \times n$). Alors, en permutant $\frac{\partial}{\partial t}$ avec D (on suppose les fonctions suffisamment régulières pour pouvoir appliquer le lemme de Schwarz), on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, v) = Df(t, \phi(t, v)) \psi(t, v).$$

En supposant ϕ connue, ceci est une équation différentielle *linéaire* par rapport à $\psi \in \mathbb{R}^{n^2}$! De plus, en dérivant la relation $\phi(t_0, v) = v$ on obtient la condition initiale

$$\psi(t_0, v) = I_n.$$

Dém. [Théorème du flot] Pour $v \in \mathcal{V} := \bar{B}(u_0, R/2)$ avec $\bar{B}(u_0, R) \subset U$, notons

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, v) : \mathcal{W} := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] &\rightarrow \bar{B}(v, R/2) \\ t &\mapsto \phi(t, v) = u(t) \end{aligned}$$

la solution de l'équation différentielle construite dans le lemme 4 pour la donnée initiale v . Alors ϕ est de classe \mathcal{C}^1 par rapport à t , et Lipschitzienne par rapport à v avec une constante de Lipschitz uniforme sur $\mathcal{W} \times \mathcal{V}$. Elle est en particulier continue comme fonction de (t, v) . Donc l'application

$$(t, v) \mapsto Df(t, \phi(t, v))$$

est aussi continue. Par suite, pour tout $v \in \mathcal{V}$ l'équation différentielle *linéaire*

$$\frac{dM}{dt} = Df(t, \phi(t, v)) M$$

admet une solution unique sur \mathcal{W} tout entier satisfaisant la condition initiale $M(t_0) = I_n$. Notons $\chi(t, v) = M(t)$ cette solution à l'instant t .

La première étape de la démonstration consiste à montrer que χ dépend continûment de (t, v) . D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\chi(t, v) - \chi(\tau, w)\| \leq \|\chi(t, v) - \chi(\tau, v)\| + \|\chi(\tau, v) - \chi(\tau, w)\|.$$

Le premier terme se majore directement par :

$$\begin{aligned} \|\chi(t, v) - \chi(\tau, v)\| &\leq |t - \tau| \max_{s \in [\tau, t]} \|\mathbf{D}f(s, \phi(s, v))\| \max_{s \in [\tau, t]} \|\chi(s, v)\| \\ &\leq |t - \tau| a(\tau, t; v) e^{a(\tau, t; v) \max(|\tau|, |t|)} \end{aligned}$$

par lemme de Gronwall, avec

$$a(\tau, t; v) := \max_{s \in [\tau, t]} \|\mathbf{D}f(s, \phi(s, v))\|.$$

D'autre part, on peut majorer le second terme grâce au lemme 3. On obtient :

$$\|\chi(\tau, v) - \chi(\tau, w)\| \leq b(\tau; v, w) |\tau| e^{\alpha(\tau; v, w) |\tau|}$$

où

$$\begin{aligned} b(\tau; v, w) &:= \|\mathbf{D}f(\tau, \phi(\tau, v)) - \mathbf{D}f(\tau, \phi(\tau, w))\|, \\ \alpha(\tau, t; v, w) &:= \max(\|\mathbf{D}f(\tau, \phi(\tau, v))\|, \|\mathbf{D}f(\tau, \phi(\tau, w))\|). \end{aligned}$$

Par continuité de $\mathbf{D}f$ et de ϕ , les fonctions a et α sont localement bornées, tandis que $b(\tau; v, w)$ converge vers 0 lorsque v tend vers w . Donc $\|\chi(t, v) - \chi(\tau, w)\|$ tend vers 0 lorsque (t, v) tend vers (τ, w) .

La seconde étape est de montrer que $\mathbf{D}\phi(t, v)$ existe et coïncide avec $\chi(t, v)$. Considérons pour cela le taux d'accroissement :

$$\theta(t, h) := \phi(t, v + h) - \phi(t, v).$$

D'après le lemme 4,

$$\|\theta(t, h)\| \leq C h$$

si v et $v + h$ sont dans \mathcal{V} . Et on a par définition de ϕ ,

$$\theta(t_0, h) = v + h - v = h.$$

Donc

$$\theta(t, h) = h + \int_{t_0}^t (f(s, \phi(s, v + h)) - f(s, \phi(s, v))) ds.$$

D'autre part, par définition de χ :

$$\chi(t, v) \cdot h = h + \int_{t_0}^t \mathbf{D}f(s, \phi(s, v)) \chi(s, v) \cdot h ds.$$

D'où, par soustraction et inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|\theta(t, h) - \chi(t, v) \cdot h\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \phi(s, v + h)) - f(s, \phi(s, v)) - Df(s, \phi(s, v)) \cdot \theta(s, h)\| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \|Df(s, \phi(s, v)) (\theta(s, h) - \chi(s, v) \cdot h)\| ds. \end{aligned}$$

Le premier terme se majore en utilisant le fait que f est de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|y - x\| \leq \eta$ entraîne

$$\|f(s, x) - f(s, y) - Df(s, y) \cdot (x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

pour tout $s \in [t_0, t]$. Donc, pour $h \leq \eta/C$, on a

$$\|f(s, \phi(s, v + h)) - f(s, \phi(s, v)) - Df(s, \phi(s, v)) \cdot \theta(s, h)\| \leq \varepsilon C h.$$

D'où pour tout $t \geq t_0$:

$$\|\theta(t, h) - \chi(t, v) \cdot h\| \leq \varepsilon C h (t - t_0) + a(t_0, t; v) \int_{t_0}^t \|\theta(s, h) - \chi(s, v) \cdot h\| ds$$

avec la même signification pour a que dans la première étape. On appliquant une nouvelle fois le lemme de Gronwall, on déduit pour $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$:

$$\|\theta(t, h) - \chi(t, v) \cdot h\| \leq \varepsilon C h \tau e^{a(t_0 - \tau, t_0 + \tau; v) \tau}.$$

Ceci montre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\phi(t, v + h) - \phi(t, v) - \chi(t, v) \cdot h) = 0,$$

c'est-à-dire que ϕ est différentiable par rapport à v et $D\phi(t, v) = \chi(t, v)$.

En conclusion, ϕ est continûment dérivable par rapport à t et à v et donc de classe \mathcal{C}^1 . □

En prime, on a montré que la différentielle de ϕ par rapport à v , $D\phi$ est de classe \mathcal{C}^1 et solution de l'équation linéaire, appelée *équation aux variations* :

$$\frac{dM}{dt} = Df(t, \phi(t, v)) M,$$

avec la condition initiale

$$D\phi(t_0, v) = I_n.$$

Remarque 5 Pour toute solution M d'une équation différentielle matricielle

$$\frac{dM}{dt} = A(t) M,$$

le déterminant $\det M$ est solution de l'équation scalaire :

$$\frac{du}{dt} = \text{tr}(A(t)) u.$$

En effet, rappelons que la différentielle du déterminant est donnée par :

$$D \det(M) \cdot H = \operatorname{tr}((\operatorname{com}M)^t H) = (\det M) \operatorname{tr}(M^{-1} H)$$

si M est inversible. Donc par dérivation de fonctions composées :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(M) &= \operatorname{tr} \left((\operatorname{com}M)^t \frac{dM}{dt} \right) = \operatorname{tr} \left((\operatorname{com}M)^t A M \right) = \operatorname{tr} \left((\operatorname{com}M)^t M A \right) \\ &= \operatorname{tr} (\det(M) A) = \operatorname{tr}(A) \det(M). \end{aligned}$$

Or une solution d'équation scalaire non identiquement nulle se n'annule pas (elle s'exprime à l'aide d'une exponentielle, voir la remarque 3). Comme $\det(D\phi(t_0, v)) = 1$, on en déduit que

$$\det(D\phi(t, v)) \neq 0$$

pour tout t .

2.5.a Cas des équations différentielles linéaires

Dans le cas d'une équation linéaire

$$\frac{du}{dt} = A(t) u,$$

on montre facilement en utilisant l'unicité des solutions que le flot $\phi^{t_0}(t, v)$ dépend linéairement de v . Plus précisément, on a :

$$\phi^{t_0}(t, v) = R(t, t_0) \cdot v,$$

où $R(t, t_0)$ est défini comme suit.

Définition 2 (Résolvante) On appelle résolvante de

$$\frac{du}{dt} = A(t) u, \quad \text{où } A \in \mathcal{C}(I; \mathcal{M}_n(\mathbb{R})),$$

l'application $(t, t_0) \in I \times I \mapsto R(t, t_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = A(t) M, \\ M(t_0) = I_n. \end{cases}$$

D'après la remarque 5, la résolvante est en fait à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$. En particulier, si (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{R}^n , alors $(R(t_0, t) \cdot e_1, \dots, R(t_0, t) \cdot e_n)$ reste une base de \mathbb{R}^n pour tout t . Comme les applications $t \mapsto R(t_0, t) \cdot e_i$ sont évidemment des solutions de

$$\frac{du}{dt} = A(t) u,$$

on voit que la résolvante permet de définir des familles indépendantes de n solutions.

Inversement, on a la

Proposition 2 Si $A \in \mathcal{C}(I; \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et u_1, \dots, u_n est une famille de n solutions indépendantes de

$$\frac{du}{dt} = A(t) u$$

alors la résolvante de cette équation est donnée par :

$$R(t, t_0) = B(t) B(t_0)^{-1},$$

où $B(t)$ est la matrice de vecteurs colonne $u_1(t), \dots, u_n(t)$ pour tout t .

Dém. On a en effet

$$\frac{d}{dt} (B(t) B(t_0)^{-1}) = B'(t) B(t_0)^{-1} = A(t) B(t) B(t_0)^{-1},$$

par construction de B . Et $B(t_0) B(t_0)^{-1} = I_n$, d'où le résultat d'après l'unicité de la solution du problème de Cauchy. \square

Bien sûr, dans le cas de coefficients *constants* (c'est-à-dire $A(t) \equiv A$), la résolvante est donnée explicitement par :

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}.$$

Dans tous les cas, la résolvante permet d'exprimer les solutions de toute équation avec terme source grâce au principe de superposition exprimé par la formule de Duhamel.

Proposition 3 (Formule de Duhamel) *Le flot en t_0 de l'équation*

$$\frac{du}{dt} = A(t) u + b(t)$$

s'écrit :

$$\phi^{t_0}(t, v) = R(t, t_0) \cdot v + \int_{t_0}^t R(t, s) \cdot b(s) ds,$$

si $R(t, t_0)$ est la résolvante de l'équation homogène.

Dém. On vérifie par un calcul facile que l'application

$$t \mapsto \int_{t_0}^t R(t, s) \cdot b(s) ds$$

est solution de l'équation avec le terme source b . Comme $t \mapsto R(t, t_0) \cdot v$ est solution de l'équation homogène, la somme des deux est, par linéarité, solution de l'équation avec terme source. De plus elle vaut v à $t = t_0$. Donc c'est l'unique solution cherchée. \square

Ce principe est souvent énoncé sous la forme :

La solution générale d'une équation avec terme source est donnée par la solution générale de l'équation homogène plus une solution particulière de l'équation avec terme source.

Il est très commode pour résoudre explicitement certaines équations. Mais il est aussi abondamment utilisé dans la *théorie* des équations différentielles (presqu'autant que le lemme de Gronwall !).

2.5.b Cas des équations différentielles autonomes

Pour une équation autonome le flot ϕ^{t_0} et le flot ϕ^{t_1} sont reliés par une simple translation. On vérifie en effet que

$$\phi^{t_0}(t, v) = \phi^{t_1}(t + t_1 - t_0, v)$$

(les deux membres sont solutions de la même équation différentielle et coïncident en $t = t_0$). C'est pourquoi on fixe $t_0 = 0$ une fois pour toutes. Et on note plutôt $\phi_t(v) = \phi^0(t, v)$. En utilisant à nouveau l'unicité des solutions on vérifie immédiatement la propriété de *semi-groupe* :

$$\phi_{t+s} = \phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s$$

pour tous s et t où les opérateurs sont bien définis. En reprenant le vocabulaire de la théorie des groupes, on appelle *orbite* (issue) d'un point v l'ensemble décrit par les points $\phi_t(v)$. Si le champ est complet les orbites sont les ensembles

$$\{\phi_t(v); t \in \mathbb{R}\}.$$

D'après l'unicité locale des solutions, des orbites ne peuvent se rencontrer sans être confondues.

Définition 3 On appelle portrait de phases d'un champ de vecteurs $f \in \mathcal{C}^1(U)$, ou de l'équation différentielle associée

$$\frac{du}{dt} = f(u),$$

la partition de U en orbites.

En pratique, le tracé d'un portrait de phase comprend

- les lieux des changements de signe des composantes du champ de vecteurs,
- l'orientation du champ de vecteurs dans les zones délimitées par ces lieux,
- quelques orbites remarquables et en particulier les points fixes (orbites réduites à un point).

Ceci ne nécessite pas de savoir résoudre explicitement l'équation différentielle, et donne malgré tout des renseignements sur les solutions de cette équation différentielle.

Les intégrales premières, lorsqu'il y en a, fournissent une aide précieuse pour préciser le portrait de phase.

Définition 4 On appelle intégrale première de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = f(u),$$

une application $E \in \mathcal{C}^1(U)$ telle que $E(u(t))$ soit constante le long de toute solution. De façon équivalente, on doit avoir :

$$DE(u) \cdot f(u) = 0 \quad \forall u \in U.$$

En pratique on utilise la première partie de la définition (avec un peu d'intuition physique) pour rechercher des intégrales premières. On peut aussi demander à un logiciel de calcul formel comme Maple de rechercher des intégrales premières. Pour une équation différentielle scalaire (d'ordre au moins 2), cela revient à chercher d'abord un *facteur intégrant*.

Exemple. Considérons l'équation du pendule, avec $g/\ell = 1$ pour simplifier. Avant tout il faut charger le "package" `DEtools` :

```
> with(DEtools):
```

Puis, avec les instructions :

```
> Equationdupendule := diff(x(t),t,t) +sin(x(t));
```

```
> mu:=intfactor(Equationdupendule);
```

```
> firint(mu*Equationdupendule);
```

on obtient comme réponses :

$$\mu := \frac{d}{dt}x(t),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 - \cos(x(t)) + C = 0;$$

ce qu'on savait déjà grâce à la physique (il y a conservation de l'énergie totale !), et qu'on peut retrouver par *séparation des variables*⁹.

Par définition, les courbes intégrales sont incluses dans les ensembles de niveau des intégrales premières. En particulier, pour un système de deux équations différentielles dont on connaît une intégrale première, tracer le portrait de phase revient, après avoir placé les points fixes, à tracer les courbes de niveau de cette intégrale première.

Exemple. Le portrait de phases du pendule simple peut ainsi être tracé à la main, grâce à l'intégrale première

$$E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos x.$$

L'allure des ensembles de niveau

$$\{(x, v); E(x, v) = a\}$$

dépend de la valeur du paramètre a . Ces ensembles sont $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \{(2\pi n, 0)\}$ pour $a = -1$, une réunion de courbes fermées disjointes pour $-1 < a < 1$, et deux courbes symétriques par rapport à l'axe des x pour $a \geq 1$ (qui s'intersectent sur l'axe des x seulement lorsque $a = 1$, les points d'intersection $(\pi + 2\pi n, 0)$ étant alors des points fixes !). On voit ainsi apparaître tous les types de solutions possibles : point d'équilibre du pendule en bas ($x = 2\pi n$), point d'équilibre en haut ($x = \pi + 2\pi n$), oscillations autour de l'équilibre du bas ($-1 < a < 1$), rotations complètes ($a > 1$). Ces solutions sont périodiques car on a négligé la résistance de l'air dans ce modèle simplifié, et donc l'amortissement du mouvement au cours du temps. Le cas $a = 1$ est assez difficile à imaginer puisqu'il n'est pas très réaliste : le mouvement du pendule partant initialement d'un point x_0 à une vitesse v_0 telle que

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \cos x_0 + 1$$

⁹C'est de cette façon qu'on trouve l'intégrale première du modèle de Lotka–Volterra du §1.4.

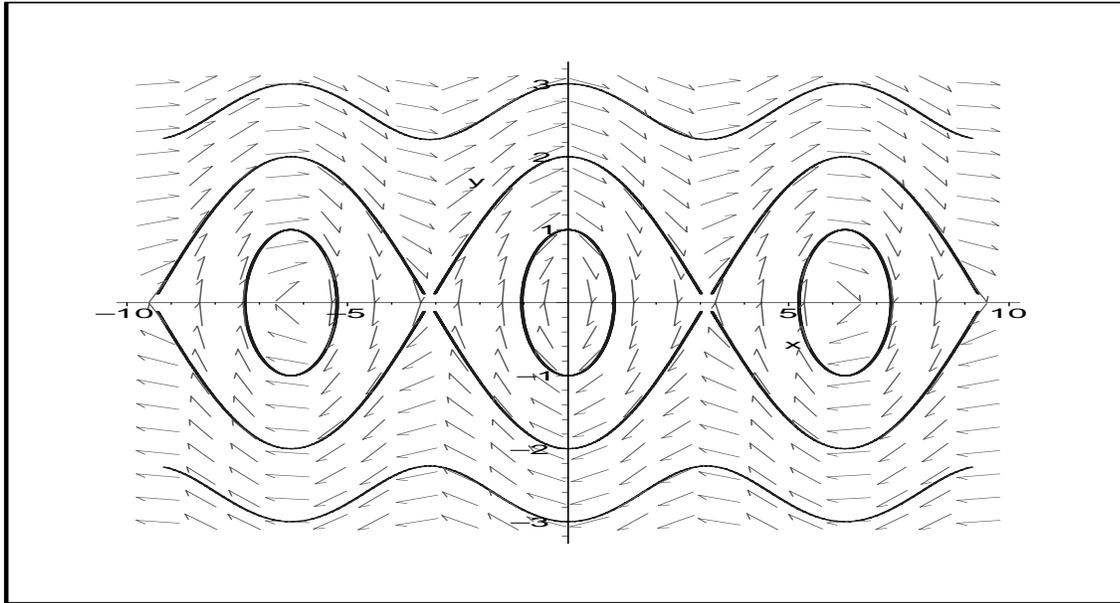


Figure 1: Portrait de phase du pendule simple tracé par Maple.

met un temps infini à atteindre le point d'équilibre du haut.

On peut aussi faire tracer le portrait de phase au logiciel Maple (par exemple). Les instructions suivantes donnent le portrait de phase de la figure 1.

```
> with(DEtools):
> phaseportrait([D(x)(t)=y(t),D(y)(t)=-sin(x(t))],[x(t),y(t)], t=-3.5..3.5,
[[x(0)=0,y(0)=2],[x(0)=0,y(0)=-2],[x(0)=2*Pi,y(0)=2],[x(0)=2*Pi,y(0)=-2],
[x(0)=-2*Pi,y(0)=2],[x(0)=-2*Pi,y(0)=-2],[x(0)=2*Pi,y(0)=1],[x(0)=2*Pi,y(0)=-1],
[x(0)=-2*Pi,y(0)=1],[x(0)=-2*Pi,y(0)=-1],[x(0)=0,y(0)=1],[x(0)=0,y(0)=-1],
[x(0)=0,y(0)=3],[x(0)=0,y(0)=-3]],stepsize=0.05);
```

Le champ de vecteurs est tracé automatiquement. Les orbites sont tracées par intégration numérique de l'équation différentielle, en précisant les conditions initiales (entre les crochets []). En effet, si on ne lui demande pas de chercher une intégrale première, Maple ne le fait pas !

Le portrait de phases dépend en fait seulement de la direction du champ de vecteurs.

Proposition 4 *Le portrait de phases d'un champ de vecteurs f coïncide avec le portrait de phases de tout champ de vecteurs de la forme λf , où $\lambda \in \mathcal{C}^1(U; \mathbb{R}^{+*})$.*

Dém. C'est une simple question de changement de paramétrage. Soit $v \in U$ et $u \in \mathcal{C}^1(]s_-, s_+])$ la solution maximale de

$$u'(s) = \lambda(u(s)) f(u(s)), \quad u(0) = v.$$

Soit alors

$$T(s) = \int_0^s \lambda(u(\sigma)) d\sigma,$$

qui est une fonction strictement croissante puisque λ est par hypothèse à valeurs positives, et soit S la fonction réciproque de T , définie sur

$$]s_-, s_+[, \quad \text{où } s_{\pm} := \int_0^{s_{\pm}} \lambda(u(\sigma)) \, d\sigma .$$

On a

$$\frac{d}{dt} u(S(t)) = u'(S(t)) \frac{dS}{dt} = \lambda(u(S(t))) f(u(S(t))) \frac{1}{\lambda(u(S(t)))} = f(u(S(t)))$$

et $u(S(0)) = u(0) = v$. Donc $U = u \circ S$ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} U'(t) = f(U(t)), \\ U(0) = v. \end{cases}$$

De plus, U est maximale. Supposons en effet que l'on puisse prolonger U à $]t_-, t_+ + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Prolongeons alors S à $]t_-, t_+ + \varepsilon]$ par

$$S(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda(U(\tau))} .$$

On peut ainsi prolonger T à $]s_-, s_+ + \eta]$ avec

$$\eta = \int_{t_+}^{t_+ + \varepsilon} \frac{d\tau}{\lambda(U(\tau))} > 0 .$$

Et on trouve que $U \circ T$ est solution du même problème de Cauchy que u sur l'intervalle $]s_-, s_+ + \eta]$, contenant strictement $]s_-, s_+[$. Cela contredit le fait que u soit maximale. C'est donc que U est aussi une solution maximale (pour le champ f). Autrement dit, l'orbite de v sous le champ λf , c'est-à-dire la courbe

$$\{ u(s); s \in]s_-, s_+[\} = \{ u \circ S(t); t \in]t_-, t_+[\}$$

est exactement l'orbite de v sous le champ f . □

Définition 5 *Un point fixe ou stationnaire ou point d'équilibre est un point v dont l'orbite est réduite à $\{v\}$, ce qui équivaut à ce que le champ de vecteurs s'annule au point v (on dit aussi que v est un point singulier du champ de vecteurs).*

D'après la remarque sur l'intersection des orbites, un point fixe ne peut jamais être atteint en temps fini. En revanche, il peut être obtenu à la limite lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

Définition 6 *On appelle orbite hétérocline une courbe intégrale globale*

$$\{ \phi_t(v); t \in \mathbb{R} \}$$

reliant deux points fixes différents en $+\infty$ et $-\infty$. On appelle orbite homocline une orbite

$$\{ \phi_t(v); t \in \mathbb{R} \}$$

reliant un même point fixe en $+\infty$ et $-\infty$.

D'autre part, on a la

Proposition 5 *S'il existe $t_0 \neq s_0$ tel que $\phi_{t_0}(v) = \phi_{s_0}(v)$ et si v n'est pas un point fixe, alors $t \mapsto \phi_t(v)$ est une solution globale périodique de l'équation différentielle de flot ϕ , et l'orbite de v est une courbe fermée simple appelée cycle.*

Dém. Supposons que $\phi_t(v)$ soit défini pour $t \in [0, T[$ avec $0 \leq s_0 < t_0 < T < +\infty$. Soit m le plus grand entier tel que

$$m(t_0 - s_0) < T.$$

L'application

$$t \mapsto \phi_{t+t_0-s_0}(v)$$

est solution de l'équation différentielle et vaut

$$\phi_{t_0}(v) = \phi_{s_0}(v)$$

en $t = s_0$. En utilisant une fois de plus l'unicité des solutions, on en déduit

$$\phi_{t+t_0-s_0}(v) = \phi_t(v) \quad \text{pour tout } t \in [0, T - (t_0 - s_0)[.$$

En particulier,

$$\phi_{m(t_0-s_0)}(v) = \phi_0(v) = v.$$

Par conséquent, l'application u définie par

$$u(t) = \phi_{t-m(t_0-s_0)}(v) \quad \text{pour } t \in [m(t_0 - s_0), (m+1)(t_0 - s_0)]$$

est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \\ u(m(t_0 - s_0)) = v \end{cases}$$

et prolonge $t \mapsto \phi_t(v)$ au delà de T . C'est donc que ϕ_t peut être prolongée à tout \mathbb{R} . Et elle est périodique de période $(t_0 - s_0)$.

L'ensemble $\{t > 0; \phi_t(v) = v\}$ contient en particulier $t_0 - s_0$. On peut donc définir

$$T := \inf\{t > 0; \phi_t(v) = v\}.$$

Si v n'est pas un point fixe, T est strictement positif. En effet, il existe alors au moins une composante f_i du champ f qui ne s'annule pas au point v . Supposons par exemple $f_i(v) > 0$. Par continuité de $t \mapsto f_i \circ \phi_t(v)$ on a donc, dans un intervalle $[0, \eta]$ avec $\eta > 0$ assez petit, $f_i(\phi_t(v)) \geq \varepsilon > 0$. Par suite la i -ème composante de $\phi_t(v) - v$ est

$$\int_0^t f_i(\phi_s(v)) ds \geq t\varepsilon$$

pour $t \in [0, \eta]$. Donc $\phi_t(v) - v$ ne peut s'annuler dans $[0, \eta]$ en dehors de $t = 0$. Ceci montre que T est strictement positif. De plus T est atteint par continuité de $t \mapsto \phi_t(v)$.

Avec cette définition de T , l'application $t \mapsto \phi_t(v)$ est injective sur $[0, T[$, et l'orbite de v est la courbe fermée sans point double

$$\{\phi_t(v); t \in [0, T[\}.$$

□

Enfin, on définit les ensembles limites :

Définition 7 Soit $v \in U$ et J l'intervalle de définition de la courbe intégrale passant par v . Si $\sup J = +\infty$, on appelle ensemble ω -limite de v l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{\phi_t(v)\}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Si $\sup J = -\infty$, on appelle ensemble α -limite de v l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{\phi_t(v)\}$ lorsque $t \rightarrow -\infty$.

Si par exemple v appartient à une orbite hétérocline, ses ensembles ω -limite et α -limite sont des singletons (les points fixes limites). Si v appartient à un cycle, ses ensembles ω -limite et α -limite sont le cycle entier. Plus généralement, le théorème de Poincaré-Bendixon que l'on verra plus loin montre que, dans le plan, les ensembles ω -limite et α -limite compacts et sans points fixes sont nécessairement des cycles. Mais attention, ce théorème est spécifique à la dimension 2. En dimension supérieure, les ensembles ω -limite et α -limite peuvent être beaucoup plus compliqués.

Tout ce qu'on peut en dire en général est la

Proposition 6 Les ensembles ω -limite et α -limite d'un point v sont fermés et invariants par le flot. Ils sont de plus inclus dans l'ensemble de niveau $\{w; H(w) = H(v)\}$ si H est une intégrale première.

Dém. Ces propriétés sont presque contenues dans la définition. Si w appartient à l'ensemble ω -limite par exemple, il existe une suite t_n tendant vers $+\infty$ telle que $\phi_{t_n}(v)$ tend vers w . Alors, quel que soit t ,

$$\phi_t(w) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t+t_n}(v)$$

appartient aussi à l'ensemble ω -limite. Donc cet ensemble est bien invariant par le flot. D'autre part, le complémentaire de l'ensemble ω -limite est par définition l'ensemble des w tels qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $t_0 > 0$ avec

$$\|\phi_t(v) - w\| \geq \varepsilon_0$$

pour tout $t \geq t_0$. Or pour un tel w , on a évidemment

$$\|\phi_t(v) - z\| \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

pour tout $t \geq t_0$ et pour tout $z \in B(w, \frac{1}{2}\varepsilon_0)$. Donc le complémentaire de l'ensemble ω -limite est ouvert. La dernière propriété est une conséquence immédiate de la définition d'une intégrale première (constante le long de $\{\phi_t(v)\}$). \square

2.6 Dépendance des solutions par rapport à un paramètre

En prolongation du lemme 3 on peut examiner la dépendance des solutions d'une équation différentielle par rapport à un ou des paramètres.

Théorème 6 On suppose f de classe C^1 sur $I \times U \times \Lambda$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , U est un ouvert de \mathbb{R}^n et Λ un ouvert de \mathbb{R}^p (ensemble de paramètres). Les solutions de l'équation différentielle à paramètre :

$$\frac{du}{dt} = f(t, u, \lambda)$$

sont continûment différentiables par rapport à λ .

Dém. Là encore il est utile de considérer un système *augmenté*, en l'occurrence :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u, \mu), \\ \frac{d\mu}{dt} = 0. \end{cases}$$

Soit Φ^{t_0} le flot local en t_0 de ce système. Alors la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t), \lambda), \\ u(t_0) = v \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = P(\Phi^{t_0}(t, (v, \lambda)))$$

où $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la projection sur \mathbb{R}^n . D'après le théorème 5, c'est une fonction continûment différentiable par rapport à (v, λ) et donc en particulier par rapport à λ . \square

3 Stabilité des points d'équilibre

On s'intéresse ici aux propriétés qualitatives des équations différentielles autonomes, et plus particulièrement à la stabilité de leurs points d'équilibre. En fait, on va distinguer deux types de stabilité qui, s'ils ne sont pas tout à fait étrangers l'un à l'autre, sont dans l'esprit assez différents.

Lorsqu'on parle de stabilité on pense à l'équation "petite perturbation au départ = petite variation à l'arrivée".

3.1 Stabilité asymptotique

Le premier type de stabilité que l'on va étudier concerne le comportement asymptotique en grand temps de la solution lorsqu'on perturbe la condition initiale.

Définition 8 *Un point fixe v du champ $f \in C^1(U)$ est dit stable s'il existe un voisinage \mathcal{V}_0 de v dans U tel que*

- i). le flot $\phi_t(w)$ est défini pour tout $t \geq 0$ et pour tout $w \in \mathcal{V}_0$,*
- ii). pour tout voisinage \mathcal{W} de v dans U , il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_0$ tel que $\phi_t(w)$ appartient à \mathcal{W} pour tout $t \geq 0$ et pour tout $w \in \mathcal{V}$.*

Si de plus, on a

- iii). pour tout $w \in \mathcal{V}_0$,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(w) = v$$

alors le point fixe v est dit asymptotiquement stable.

On dit d'un point non stable qu'il est *instable*.

Commençons par étudier la stabilité des points fixes dans le cas simple et néanmoins fondamental des équations linéaires. Le résultat suivant est un pont entre l'analyse et l'algèbre.

Théorème 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le point 0 est stable pour l'équation

$$\frac{du}{dt} = Au$$

si et seulement si

- a). les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle négative ou nulle,
- b). les valeurs propres imaginaires pures de A sont semi-simples, c'est-à-dire que leurs sous-espaces caractéristiques sont confondus avec leurs sous-espaces propres.

Le point 0 est asymptotiquement stable si et seulement si

- c). les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Dém. Le seul résultat d'algèbre dont nous avons besoin est la décomposition de l'espace en somme directe des sous-espaces caractéristiques. On identifie A avec un endomorphisme de \mathbb{C}^n . Si l'ensemble des valeurs propres de A dans \mathbb{C} est $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (avec $\lambda_j \neq \lambda_k$ pour $j \neq k$), on définit les sous-espaces caractéristiques

$$E_k = \text{Ker} (A - \lambda_k I_n)^{s_k}, \quad k = 1, \dots, p,$$

où s_k est le plus grand entier s tel que

$$\text{Ker} (A - \lambda_k I_n)^{s-1} \subset \text{Ker} (A - \lambda_k I_n)^s$$

avec inclusion stricte. (La dimension de E_k est appelée *multiplicité algébrique* de λ_k ; elle coïncide avec l'ordre de λ_k comme zéro du polynôme caractéristique de A .) Le sous-espace caractéristique E_k coïncide avec le sous-espace propre $\text{Ker} (A - \lambda_k I_n)$ (dont la dimension est appelée *multiplicité géométrique*) si et seulement si $s_k = 1$. On sait que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^p E_k$. Autrement dit, si P_k est la projection sur E_k parallèlement à $\bigoplus_{j \neq k} E_j$, on a

$$I_n = \sum_{k=1}^p P_k.$$

De plus, par définition de s_k ,

$$(A - \lambda_k I_n)^s P_k = 0$$

pour tout $s \geq s_k$. Par suite

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^p e^{tA} P_k = \sum_{k=1}^p e^{t\lambda_k} e^{t(A - \lambda_k I_n)} P_k = \sum_{k=1}^p e^{t\lambda_k} \sum_{s=1}^{s_k-1} \frac{t^s}{s!} (A - \lambda_k I_n)^s P_k.$$

La stabilité de 0 demande que e^{tA} soit bornée pour $t \geq 0$, ce qui est clairement assuré par a) et b), et la stabilité asymptotique demande que e^{tA} tende vers 0 en $+\infty$, ce qui est assuré par c). On se convainc facilement que ce sont des conditions nécessaires. S'il

existe λ de partie réelle strictement positive tel que $Av = \lambda v$ pour un vecteur v non nul, alors

$$e^{tA}v = e^{t\lambda}v$$

est non borné. Ceci montre que *a*) est nécessaire pour avoir la stabilité. De plus *b*) l'est aussi. En effet, si $\lambda \in i\mathbb{R}$ est une valeur propre non semi-simple, il existe des vecteurs non nuls v et w tels que

$$Av = \lambda v, \quad Aw = \lambda w + v.$$

On montre par récurrence que

$$A^m w = \lambda^m w + m\lambda^{m-1}v$$

pour tout entier naturel m , et donc

$$e^{tA}w = e^{t\lambda}(w + tv)$$

est de norme supérieure ou égale à $t\|v\| - \|w\|$ pour $t \geq 0$, ce qui est évidemment non borné. Enfin, si $\lambda \in i\mathbb{R}$ est une valeur propre même simple, $Av = \lambda v$ avec v non nul entraîne que

$$e^{tA}v = e^{t\lambda}v$$

est de norme égale à $\|v\|$, ce qui ne tend pas vers 0. Donc *c*) est nécessaire pour avoir la stabilité asymptotique. \square

Pour les équations non-linéaires, la question est plus délicate. Des conditions suffisantes de stabilité sont fournies par les *fonctions de Lyapunov*, lorsqu'il y en a. Il existe diverses définitions des fonctions de Lyapunov, certaines dites faibles (assurant la stabilité) et certaines dites fortes (assurant la stabilité asymptotique). Commençons par des conditions suffisantes de stabilité tout court.

Théorème 8 (Lyapunov n°1) *Soit v un point d'équilibre du champ $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de v dans U et une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V})$, appelée fonction de Lyapunov, admettant un minimum strict en v et telle que*

$$DF(u) \cdot f(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathcal{V}.$$

Alors v est un point d'équilibre stable.

Exemple. En particulier, une intégrale première admettant un minimum local strict en v est une fonction de Lyapunov. Ce théorème montre par exemple que les points $(2\pi n, 0)$ sont des points d'équilibre stables pour l'équation du pendule simple. En effet, les courbes intégrales issues de points voisins de ces points restent au voisinage puisqu'elles décrivent des courbes fermées autour de ces points : physiquement, cela signifie que le pendule oscille indéfiniment autour de sa position d'équilibre. Le point est stable mais pas asymptotiquement stable (il le serait si on incluait de l'amortissement dans le modèle, voir la remarque 6 ci-après).

Dém. [Théorème de Lyapunov n°1] La preuve utilise explicitement la dimension finie. On donnera ci-après une version du théorème valable en dimension infinie. Soit $R > 0$ tel que $\bar{B}(v, R) \subset \mathcal{V}$, et soit

$$m = \min_{\|u-v\|=R} F(u)$$

le minimum de F sur le bord de $\bar{B}(v, R)$. Comme F admet un minimum strict en v et F est continue,

$$\mathcal{V}_R := \{u \in \bar{B}(v, R); F(u) < m\}$$

est un voisinage de v inclus dans \mathcal{V} . Si w appartient à \mathcal{V}_R , comme $t \mapsto F(\phi_t(w))$ est décroissante alors

$$F(\phi_t(w)) \leq F(w) < m$$

pour $t \geq 0$ et donc $\phi_t(w) \notin \partial \bar{B}(v, R)$. Par suite, $\phi_t(w)$ reste dans le voisinage compact $\bar{B}(v, R)$ de v pour tout $t \geq 0$ (elle est bien définie pour tout $t \geq 0$ à cause du théorème des bouts), et même dans le voisinage \mathcal{V}_R . \square

Théorème 9 (Lyapunov n°1b) *Soit v un point d'équilibre du champ $f \in \mathcal{C}^1(U)$, U étant un ouvert dans un espace de Banach X . On suppose qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de v dans U et une fonction $F \in \mathcal{C}^2(\mathcal{V})$, telle que*

- $DF(v) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $D^2F(v) \geq \alpha \text{Id}$ et
- $DF(u) \cdot f(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathcal{V}$.

Alors v est un point d'équilibre stable.

Dém. L'hypothèse est un peu plus forte que dans le théorème 8 mais elle assure la stabilité du point même en dimension infinie. Une fonction de classe \mathcal{C}^1 dans un espace de Banach est toujours localement bornée et localement lipschitzienne. Soit donc $\eta_0 > 0$ tel que $B(v, 2\eta_0) \subset \mathcal{V}$ et M une borne de f , L une constante de Lipschitz de f sur cette boule. On sait définir le flot $\phi_t(w)$ pour tout $w \in B(v, \eta_0)$ et $t \in [0, \tau]$, $\tau := \min(\frac{\eta_0}{2M}, \frac{1}{2L})$ (voir la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz).

D'après l'hypothèse sur F et la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe $\eta \leq \eta_0$ tel que

$$F(v+h) - F(v) \geq \frac{\alpha}{4} \|h\|^2$$

pour tout $h \in X$ avec $\|h\| \leq \eta$. Par suite,

$$\inf_{\|u-v\|=\eta} F(u) \geq F(v) + \frac{\alpha}{4} \eta^2 =: m.$$

Par continuité de F ,

$$\mathcal{V}_\eta := \{u \in B(v, \eta); F(u) < m\}$$

est un voisinage (ouvert) de v dans U . De plus, si $w \in \mathcal{V}_\eta$,

$$F(\phi_t(w)) \leq F(w) < m$$

pour $t \in [0, \tau]$ et donc $\|\phi_t(w) - v\|$ reste strictement inférieur à $\eta \leq \eta_0$. En particulier, $\phi_\tau(w)$ appartient à $\mathcal{V}_\eta \subset B(v, \eta_0)$. Donc on peut prolonger $\phi_t(w)$ à $t \in [\tau, 2\tau]$, et de proche en proche à tout intervalle $[k\tau, (k+1)\tau]$ ($k \in \mathbb{N}$), tant en restant dans \mathcal{V}_η . En conclusion, pour tout $w \in \mathcal{V}_\eta$, $\phi_t(w)$ est défini pour tout $t \geq 0$ et à valeurs dans \mathcal{V}_η . \square

Passons maintenant à des conditions suffisantes de stabilité asymptotique.

Théorème 10 (Lyapunov n°2) Soit v un point d'équilibre du champ $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de v dans U et une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V})$, appelée fonction de Lyapunov forte, admettant un minimum strict en v et telle que

$$DF(u) \cdot f(u) < 0 \quad \forall u \in \mathcal{V} \setminus \{v\}.$$

Alors v est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Remarque 6

- a). Bien sûr, une intégrale première n'est pas une fonction de Lyapunov forte. Cependant, on peut parfois trouver une fonction de Lyapunov forte comme intégrale première d'un système "approché". C'est le cas par exemple pour l'équation du pendule avec amortissement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \sin x = 0, \quad k > 0.$$

Soit E l'intégrale première connue pour $k = 0$:

$$E(x, x') = \frac{1}{2} (x')^2 - \cos x.$$

Alors pour une solution du système amorti on a :

$$\frac{d}{dt} E(x(t), x'(t)) = x'(t) (x''(t) + \sin x(t)) = -k (x'(t))^2 < 0$$

pour $x'(t) \neq 0$. Donc le théorème 10 montre que les points $(2\pi n, 0)$ sont des points d'équilibre asymptotiquement stables pour l'équation du pendule avec amortissement : physiquement, cela signifie que le pendule revient asymptotiquement (c'est-à-dire en temps a priori infini) à sa position d'équilibre. Dans la réalité ce retour se passe évidemment en temps fini : le modèle est encore trop simplifié !

- b). Des systèmes admettant une fonction de Lyapunov forte évidente sont les systèmes gradient, de la forme

$$\frac{du}{dt} = -\text{grad}V(u).$$

Si v est un minimum local strict de V alors V est une fonction de Lyapunov forte au point v .

Remarque 7 L'existence d'une fonction de Lyapunov forte s'avère une condition également nécessaire pour la stabilité asymptotique dans les systèmes linéaires, comme le montre le lemme 5 plus loin.

Dém. [Théorème de Lyapunov n°2] À nouveau la preuve est élémentaire et utilise la dimension finie. D'après les hypothèses et la preuve du théorème 8, il existe un voisinage relativement compact (car borné!) \mathcal{W} de v inclus dans \mathcal{V} tel que

$$\overline{\phi_t(\mathcal{W})} \subset \mathcal{W}$$

pour tout $t \geq 0$. Soit $w \in \mathcal{W}$, $w \neq v$. Pour montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(w) = v,$$

il suffit de montrer que toutes les suites convergentes $\phi_{t_n}(w)$ avec $t_n \rightarrow +\infty$ ont la même limite v . On raisonne par l'absurde. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(w) = w_\infty \in \mathcal{W} \setminus \{v\} \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty.$$

Alors, pour $t_n > s > 0$,

$$F(\phi_{t_n}(w)) < F(\phi_s(w)) < F(w),$$

d'où par continuité de F :

$$F(w_\infty) \leq F(\phi_s(w)) < F(w).$$

Par ailleurs, puisque $w_\infty \neq v$, on a pour tout $\tau > 0$,

$$F(\phi_\tau(w_\infty)) < F(w_\infty).$$

Or, par définition de w_∞ et continuité de F , on a grâce à la propriété $\phi_\tau \circ \phi_{t_n} = \phi_{\tau+t_n}$ et à la continuité de ϕ_τ :

$$F(\phi_\tau(w_\infty)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(\phi_{\tau+t_n}(w)).$$

Donc il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$F(\phi_{\tau+t_n}(w)) < F(w_\infty).$$

Ceci contredit l'inégalité

$$F(w_\infty) \leq F(\phi_s(w))$$

précédemment montrée pour tout $s > 0$. □

Le résultat analogue valable en toutes dimensions est le suivant.

Théorème 11 (Lyapunov n°2b) *Soit v un point d'équilibre du champ $f \in \mathcal{C}^1(U)$, U étant un ouvert dans un espace de Banach X . On suppose qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de v dans U et une fonction $F \in \mathcal{C}^2(\mathcal{V})$, telle que*

- $DF(v) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $D^2F(v) \geq \alpha \text{Id}$ et
- il existe $\beta > 0$ tel que $DF(u) \cdot f(u) \leq -\beta(F(u) - F(v)) \quad \forall u \in \mathcal{V}$.

Alors v est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Dém. On sait déjà d'après la preuve du théorème 9 qu'il existe un voisinage \mathcal{W} de v inclus dans \mathcal{V} tel que

$$\phi_t(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$$

pour tout $t \geq 0$. L'hypothèse renforcée sur F permet facilement de voir que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(w) = v$$

pour tout $w \in \mathcal{W}$. En effet,

$$\frac{d}{dt} (F(\phi_t(w)) - F(v)) = DF(\phi_t(w)) \cdot f(\phi_t(w)) \leq -\beta (F(\phi_t(w)) - F(v))$$

implique par une intégration immédiate :

$$(F(\phi_t(w)) - F(v)) \leq (F(w) - F(v)) e^{-\beta t}.$$

Or

$$F(\phi_t(w)) - F(v) \geq \frac{\alpha}{4} \|\phi_t(w) - v\|^2$$

par construction de \mathcal{W} . □

Le théorème 10 permet le tour de force suivant.

Théorème 12 (Lyapunov n°3) *Soit v un point d'équilibre du champ $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que la matrice jacobienne $Df(v)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Alors v est asymptotiquement stable.*

On dit aussi en abrégé que la *stabilité spectrale* (c'est-à-dire que le spectre du linéarisé est inclus dans $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda < 0\}$) implique la stabilité non-linéaire. C'est un résultat spécifique de la dimension finie¹⁰, qui équivaut d'après le théorème 7 à l'assertion suivante. Si v est un point d'équilibre de f et si 0 est un point d'équilibre *asymptotiquement stable* du système *linéarisé* autour de ce point d'équilibre :

$$\frac{du}{dt} = Df(v)u$$

alors v est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système *non-linéaire*.

Pour démontrer le théorème 12, on a besoin du

Lemme 5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont toutes de partie réelle strictement négative. Alors l'équation*

$$\frac{du}{dt} = Au$$

admet une fonction de Lyapunov forte qui est une forme quadratique.

Dém. On commence par "diagonaliser A à ε près", c'est-à-dire à trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, une matrice $P_\varepsilon \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $C_\varepsilon \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de norme (subordonnée à la norme hermitienne sur \mathbb{C}^n) inférieure à ε telles que

$$P_\varepsilon^{-1} A P_\varepsilon = D + C_\varepsilon$$

avec D diagonale de coefficients $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ les valeurs propres de A . Pour cela, il suffit de trigonaliser A de façon particulière : si a est l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de \mathbb{C}^n , on fabrique une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ dans laquelle la matrice de a soit une matrice triangulaire supérieure $D + B$, c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$a(\mathbf{e}_j) = \lambda_j \mathbf{e}_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij} \mathbf{e}_i,$$

¹⁰Démontrer le même résultat en dimension infinie demande en général beaucoup d'efforts supplémentaires.

puis on dilate les vecteurs de base en $\tilde{\mathbf{e}}_j = \eta^j \mathbf{e}_j$, de sorte que

$$a(\tilde{\mathbf{e}}_j) - \lambda_j \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij} \eta^{j-i} \tilde{\mathbf{e}}_i.$$

Autrement dit, on a $P^{-1} A P = D + C$ avec P la matrice de vecteurs colonnes $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n$ et C la matrice triangulaire supérieure de coefficients $c_{ij} := b_{ij} \eta^{j-i}$ pour $i \leq j-1$ (et $c_{ij} = 0$ pour $i \geq j$). Cette matrice est de norme inférieure à ε pourvu que $\eta < \min(1, \varepsilon/\|B\|)$.

Soit alors

$$q(u) = u^* Q^* Q u = \|Q u\|^2, \quad Q = P_\varepsilon^{-1}.$$

On a

$$q(0) = 0, \quad Dq(u) \cdot h = u^* Q^* Q h + h^* Q^* Q u, \quad D^2q(u) = 2 Q^* Q.$$

Comme $Q^* Q$ est hermitienne définie positive, la fonction q admet bien un minimum local strict en 0 (on a la minoration évidente $Q^* Q \geq \alpha I_n$ avec $\alpha = \min_{\|h\|=1} \|Qh\|^2$). De plus,

$$Dq(u) A u = 2 \operatorname{Re} (u^* Q^* Q A u) = 2 \operatorname{Re} (u^* Q^* D Q u) + 2 \operatorname{Re} (u^* Q^* C Q u).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\operatorname{Re} (u^* Q^* C Q u) \leq \|Q u\| \|C Q u\| \leq \varepsilon \|Q u\|^2$$

par construction de C . Donc, si $\beta = -\max_j \operatorname{Re} \lambda_j$, on a

$$Dq(u) A u \leq -2(\beta - \varepsilon) q(u),$$

ce qui implique que q est une fonction de Lyapunov forte pourvu qu'on ait choisi $\varepsilon < \beta$.
□

Dém. [Théorème 12] On peut appliquer le lemme 5 à la matrice jacobienne $A = Df(v)$. On a ainsi une forme quadratique $q(u) = \|Q u\|^2$, telle que

$$q(0) = 0, \quad Dq(0) = 0, \quad Dq(0) \geq \alpha I_n$$

et

$$Dq(u) A u \leq -\beta q(u)$$

avec α et $\beta > 0$. Alors $F(w) = q(w - v)$ définit une fonction de Lyapunov forte pour le champ f . En effet, on a de façon évidente :

$$F(v) = 0, \quad DF(v) = 0, \quad D^2F(v) \geq \alpha I_n.$$

De plus, d'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(w) = Df(v)(w - v) + B(v, w) \cdot (w - v, w - v)$$

où $B(v, w)$ est l'application bilinéaire définie par :

$$B(v, w) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \theta) D^2f(v + \theta(w - v)) d\theta.$$

En particulier, il existe $c > 0$ tel que pour $\|w - v\| \leq 1$:

$$\|B(v, w) \cdot (w - v, w - v)\| \leq c \|w - v\|^2 \leq \frac{2c}{\alpha} \|Q(w - v)\|^2.$$

Par suite

$$\begin{aligned} DF(w) f(w) &= 2 \operatorname{Re} ((w - v)^* Q^* Q f(w)) \\ &= Dq(w - v) A(w - v) + 2 \operatorname{Re} ((w - v)^* Q^* Q B(v, w) \cdot (w - v, w - v)) \end{aligned}$$

d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$DF(w) f(w) \leq -\beta F(w) + \frac{4c}{\alpha} \|Q\| \|Q(w - v)\|^3 \leq -\left(\beta - \frac{4c}{\alpha} \|Q\|^2 \|w - v\|\right) F(w).$$

Pour $\|w - v\| \leq \frac{\alpha\beta}{8c\|Q\|^2}$ on a donc

$$DF(w) f(w) \leq -\frac{\beta}{2} F(w).$$

Donc F est une fonction de Lyapunov forte pour f au point v , et l'équilibre v est asymptotiquement stable d'après le le théorème 11. \square

Pour un "gros" système, il peut parfois être plus facile de trouver une fonction de Lyapunov que de montrer que le système linéarisé a ses valeurs propres sont de partie réelle négative. En dimension infinie, le spectre du linéarisé est encore plus difficile à localiser et il ne suffit pas à prouver la stabilité. La recherche de fonctions de Lyapunov est donc très importante.

3.2 Stabilité structurelle

Le second type de stabilité concerne la transformation du portrait de phase (local) par perturbation (locale) du champ de vecteurs.

Commençons par étudier en détail le portrait de phase d'un système *linéaire* de deux équations. C'est un grand classique, qui donne lieu à l'introduction d'une terminologie abondante.

L'expression de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dépend de la position de ses valeurs propres sur l'axe réel ou non et de leur multiplicité. On distingue trois cas :

- a). Les valeurs propres λ et μ de A sont réelles et A est diagonalisable. Si P est une matrice de passage à une base de vecteurs propres, on a

$$P^{-1} e^{tA} P = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

- b). La matrice A admet une valeur propre réelle λ non semi-simple. Si P est une matrice de passage à une base de Jordan,

$$P^{-1} e^{tA} P = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

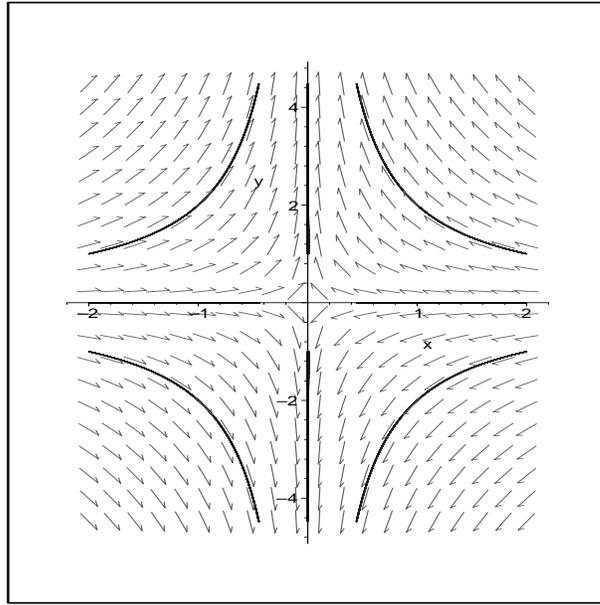


Figure 2: Portrait de phase pour un point selle ($\lambda = -1, \mu = 1$).

c). Les valeurs propres λ et μ de A sont complexes conjuguées. Alors A est semblable à

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \operatorname{Re} \lambda$ et $\beta = \operatorname{Im} \lambda$ et

$$P^{-1} e^{tA} P = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Les cas $a)$ et $b)$ découlent directement des calculs effectués dans la preuve du théorème 7. Pour le cas $c)$, on diagonalise d'abord A dans une base complexe ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 = \overline{\mathbf{e}_1}$) puis on pose $\mathbf{r}_1 = \operatorname{Re} \mathbf{e}_1, \mathbf{r}_2 = \operatorname{Im} \mathbf{e}_1$.

Concernant les portraits de phase, chacun des cas $a), b)$ et $c)$ se décompose en sous-cas selon les signes des parties réelles des valeurs propres. (On met à part la cas trivial $A = 0$.)

Le cas $a)$ peut donner lieu à cinq portraits de phase différents :

Point selle ou col si les valeurs propres sont réelles et de signe opposé, figure 2.

Nœud impropre si les valeurs propres sont réelles distinctes mais de même signe (nœud attractif si négatives; nœud répulsif si positives), figure 3.

Nœud propre s'il y a une seule valeur propre semi-simple et réelle non-nulle (nœud attractif si négative; nœud répulsif si positive), figure 4.

Le cas $b)$ donne un nœud dit exceptionnel, attractif ou répulsif selon le signe la valeur propre réelle non semi-simple λ , figure 5.

Enfin, le cas $c)$ donne trois portraits de phase distincts :

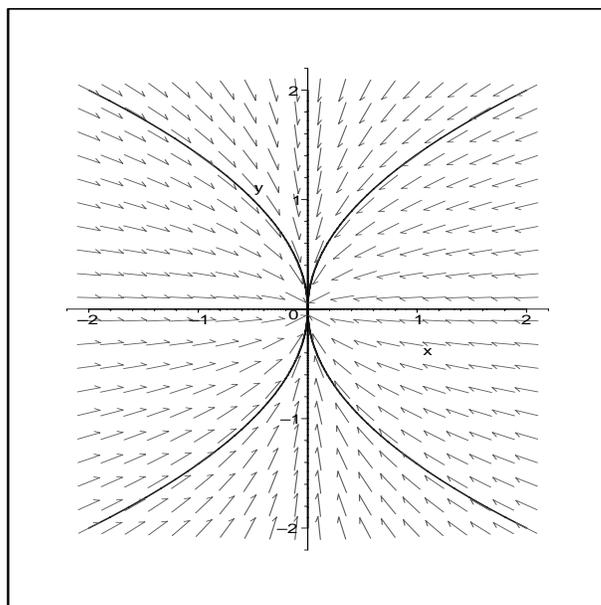


Figure 3: Portrait de phase pour un nœud impropre attractif ($\lambda = -2, \mu = -1$).

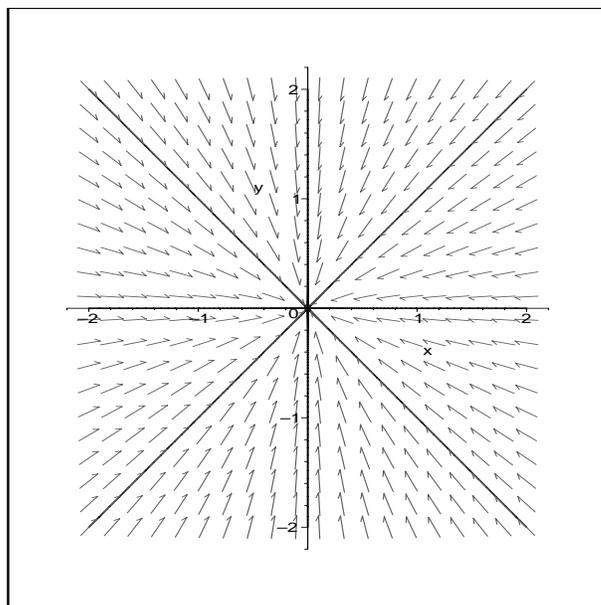


Figure 4: Portrait de phase pour un nœud propre attractif ($\lambda = -1$).

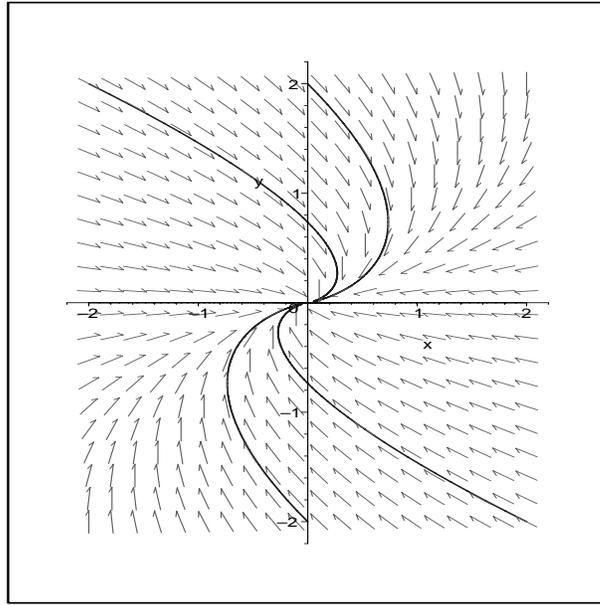


Figure 5: Portrait de phase pour un nœud exceptionnel attractif ($\lambda = -1$).

Foyer si les valeurs propres sont complexes (conjuguées) et de partie réelle non nulle (foyer attractif si négative et répulsif si positive), figure 6.

Centre si les valeurs propres sont imaginaires pures non nulles, figure 7.

Les nœuds attractifs sont aussi appelés *puits* et les nœuds répulsifs *sources*.

On voit sur cette classification que les centres jouent un rôle particulier. Ils ne sont pas structurellement stables : une modification arbitrairement petite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $|\alpha| \ll 1$ modifie dramatiquement le portrait de phase au voisinage de 0 ! Ces points sont les prototypes de points fixes *non hyperboliques*.

Définition 9 *Un point singulier v du champ f est dit hyperbolique si la matrice jacobienne $Df(v)$ n'admet aucune valeur propre imaginaire pure.*

Les points fixes hyperboliques sont précisément ceux qui sont structurellement stables, au sens topologique du terme. C'est l'objet du théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 13 (Hartman-Grobman) *Si v est un point fixe hyperbolique de l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dt} = f(u),$$

avec $f \in C^1(U)$, U un ouvert de \mathbb{R}^n , il existe un voisinage \mathcal{V} de v dans U , un voisinage \mathcal{O} de 0 dans \mathbb{R}^n et un homéomorphisme h de \mathcal{V} sur \mathcal{O} tel que le flot $\phi_t(w)$ vérifie :

$$h(\phi_t(w)) = e^{tDf(v)} h(w)$$

pour tout $w \in \mathcal{V}$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_t(w)$ soit bien défini.

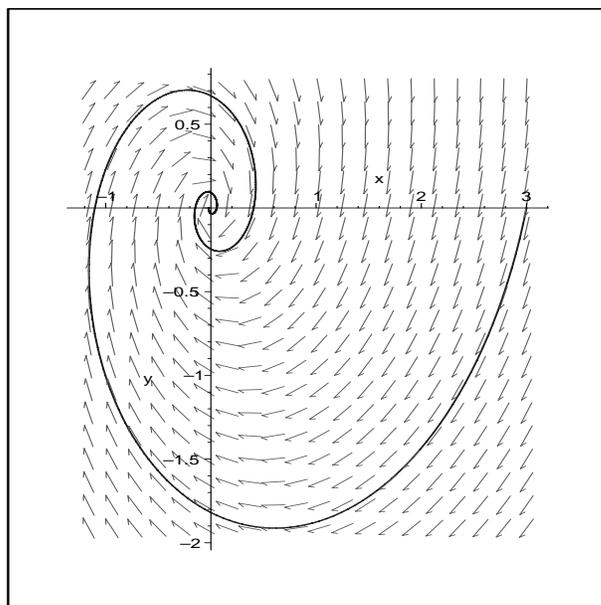


Figure 6: Portrait de phase pour un foyer attractif ($\alpha = -1, \beta = \pi$).

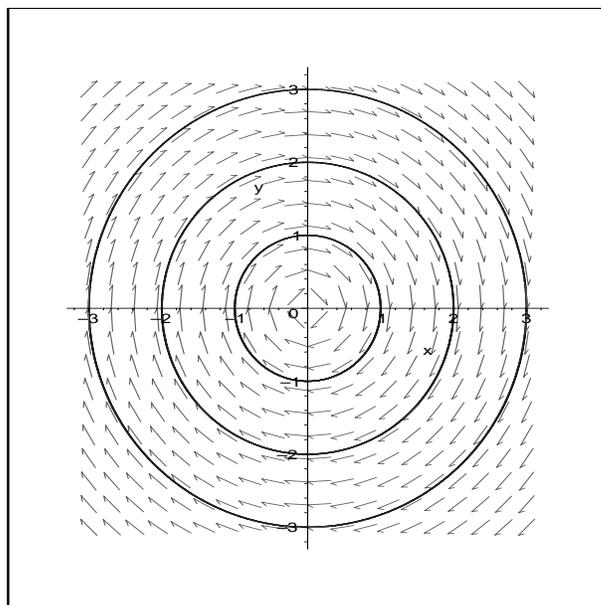


Figure 7: Portrait de phase pour un centre ($\beta = \pi$).

Ce théorème signifie que l'on peut déformer *continûment* les orbites au voisinage de v pour obtenir les orbites du système linéarisé

$$\frac{du}{dt} = Df(v)(u - v),$$

et réciproquement. Il ne dit rien sur les propriétés de nature différentielle (tangentes, convexité, etc.) de ces courbes. En particulier, il ne fait pas la distinction entre les différentes sortes de nœuds en dimension 2. Le théorème dit de la variété stable ci-après ne fait pas non plus de distinction entre ces points, mais il donne des informations sur les propriétés différentielles des orbites, souvent utiles dans les applications. La démonstration que nous en donnons¹¹ est de plus l'occasion de présenter la *méthode de Lyapunov-Schmidt*.

Avant d'énoncer ce théorème, commençons par le

Lemme 6 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice sans valeur propre imaginaire pure. Alors les ensembles*

$$E^s = \{w \in \mathbb{R}^n; \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} w = 0\}, \quad E^u = \{w \in \mathbb{R}^n; \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA} w = 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n stables par A , appelés respectivement sous-espace stable et sous-espace instable, et il existe des projecteurs π_u et π_s commutant avec A tels que $\pi_u + \pi_s = I_n$ satisfaisant les estimations suivantes. En notant

$$\beta = -\max\{\operatorname{Re} \lambda < 0; \lambda \in \sigma(A)\} \quad \text{et} \quad \gamma = \min\{\operatorname{Re} \lambda > 0; \lambda \in \sigma(A)\},$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes b_ε et c_ε telles que

$$\|e^{tA} \pi_s\| \leq b_\varepsilon e^{-(\beta-\varepsilon)t} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \|e^{tA} \pi_u\| \leq c_\varepsilon e^{(\gamma-\varepsilon)t} \quad \forall t \leq 0.$$

Dém. Le fait que E^s et E^u soient des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n stables par A est évident (rappelons que e^{tA} commute avec A). On va commencer par définir les projecteurs π_u et π_s , et on vérifiera ensuite que $E^s = \operatorname{Im}(\pi_s)$ et $E^u = \operatorname{Im}(\pi_u)$. On reprend pour cela les mêmes notations que dans la preuve du théorème 7. Soient

$$\pi_s = \sum_{k; \operatorname{Re} \lambda_k < 0} P_k \quad \text{et} \quad \pi_u = \sum_{k; \operatorname{Re} \lambda_k > 0} P_k.$$

Comme les P_k , π_s et π_u sont bien des projecteurs commutant avec A . Et comme A n'a pas de valeur propre imaginaire pure on a

$$\pi_u + \pi_s = \sum_{k=1}^p P_k = I_n.$$

De plus, on a l'expression explicite :

$$e^{tA} \pi_s = \sum_{k; \operatorname{Re} \lambda_k < 0} e^{t\lambda_k} \sum_{m=1}^{m_k-1} \frac{t^m}{m!} (A - \lambda_k I_n)^m \pi_s,$$

¹¹il en existe diverses autres

D'où, si $M = \max_k m_k - 1$,

$$\|e^{tA} \pi_s\| \leq n \max_{m \leq M} \|(A - \lambda_k I_n)^m\| \|\pi_s\| e^{-\beta|t|} \sum_{m=1}^M \frac{|t|^m}{m!}.$$

Ce dernier terme, polynômial en $|t|$, étant majoré par une constante fois $e^{\varepsilon|t|}$ pour $\varepsilon > 0$, on en déduit l'estimation de $\|e^{tA} \pi_s\|$. L'estimation de $\|e^{tA} \pi_u\|$ s'obtient exactement de la même manière. On déduit directement de ces estimations les inclusions

$$\text{Im}(\pi_s) \subset E^s \quad \text{et} \quad \text{Im}(\pi_u) \subset E^u.$$

Réciproquement, soit par exemple $w \in E^s$. Comme π_u commute avec A , il commute aussi avec e^{tA} , donc

$$\|\pi_u w\| = \|e^{tA} \pi_u e^{-tA} w\| \leq c_\varepsilon e^{(\gamma-\varepsilon)t} \|e^{-tA} w\|$$

pour tout $t \leq 0$. En prenant $\varepsilon < \gamma$, le second membre tend vers 0 lorsque tend t vers $-\infty$ (pour le dernier terme, on utilise simplement la définition de E^s). Donc $\pi_u w = 0$, c'est-à-dire que $w = \pi_s w \in \text{Im}(\pi_s)$. Ainsi $E^s \subset \text{Im}(\pi_s)$. On montre de façon analogue que E^u est inclus dans $\text{Im}(\pi_u)$. \square

Pour tout intervalle I de \mathbb{R} , on note $\mathcal{C}_b(I; \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions bornées uniformément continues sur I à valeurs dans \mathbb{R}^n , muni de la norme uniforme, et $\mathcal{C}_b^1(I; \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions dérivables appartenant à $\mathcal{C}_b(I; \mathbb{R}^n)$ ainsi que leur dérivée, muni de la norme naturelle :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}_b^1(I)} = \sup_{t \in I} \|\varphi(t)\| + \sup_{t \in I} \|\varphi'(t)\|.$$

Ce sont des espaces de Banach.

Théorème 14 (dit de la variété stable) *Si v est un point fixe hyperbolique de l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

(avec $f \in \mathcal{C}^1(U)$, U un ouvert de \mathbb{R}^n), dont le flot est noté $\phi_t(w)$, il existe un voisinage \mathcal{V} de v dans U tel que les ensembles

$$W_{\text{loc}}^s = \{w \in \mathcal{V}; t \mapsto \phi_t(w) \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^+)\}, \quad W_{\text{loc}}^u = \{w \in \mathcal{V}; t \mapsto \phi_t(w) \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^-)\}$$

soient des variétés (à bord) contenant v , tangentes respectivement à E^s et E^u , les sous-espaces stable et instable de $Df(v)$, au point v . De plus, W_{loc}^s est positivement invariante par le flot, c'est-à-dire $\phi_t(W_{\text{loc}}^s) \subset W_{\text{loc}}^s$ pour tout $t \geq 0$, tandis que $\phi_t(W_{\text{loc}}^u) \subset W_{\text{loc}}^u$ pour tout $t \leq 0$, et on a

$$W_{\text{loc}}^s = \{w \in \mathcal{V}; \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(w) = v\}, \quad W_{\text{loc}}^u = \{w \in \mathcal{V}; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(w) = v\}.$$

Définition 10 *Les ensembles W_{loc}^s et W_{loc}^u sont appelés respectivement variété stable locale et variété instable locale. De plus, on définit les variétés globales :*

$$W^s = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{\text{loc}}^s) \quad \text{et} \quad W^u = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{\text{loc}}^u).$$

Méthode de Lyapunov-Schmidt. Comme on l'a dit plus haut, une façon parmi d'autres de démontrer le théorème de la variété stable est d'appliquer la *méthode de Lyapunov-Schmidt*. Cette méthode permet de résoudre un problème non-linéaire du type

$$F(x, \xi) = 0,$$

lorsque le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas, c'est-à-dire lorsque la différentielle de F par rapport à x n'est *pas inversible*. Plus précisément, considérons F de la forme

$$F(x, \xi) = Bx - G(x, \xi)$$

pour $(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^p$, où X est un espace de Banach, B est un opérateur continu de X dans un autre espace de Banach Z et $G \in \mathcal{C}^1(X \times \mathbb{R}^p; Z)$ est telle que¹²

$$G(0, 0) = 0, \quad \partial_x G(0, 0) = 0.$$

La méthode de Lyapunov-Schmidt est fondée sur une conséquence du

Théorème 15 (dit de l'application ouverte) *Si B est un opérateur linéaire continu surjectif d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y , alors B est ouverte, c'est-à-dire pour tout ouvert Ω de X , $B(\Omega)$ est un ouvert de Y .*

(La démonstration de ce théorème se trouve par exemple dans le livre d'analyse fonctionnelle de Brézis, p. 19–20.) On sait qu'une application linéaire injective admet un inverse à gauche au sens algébrique, de même qu'une application linéaire surjective admet un inverse à droite. Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, l'existence d'un inverse à droite (continu) pour une application linéaire surjective demande en plus que son noyau admette un *supplémentaire topologique*¹³, tandis que l'existence d'un inverse à gauche (continu) pour une application linéaire injective demande que son image soit fermée et admette un supplémentaire topologique (voir par exemple Brézis, p. 23). Le lemme suivant rassemble en quelque sorte ces deux résultats en un seul.

Lemme 7 *Soit B un opérateur linéaire continu d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Z . Si $X_0 := \text{Ker} B$ admet un supplémentaire topologique $X_1 = \text{Ker} P$, où P est un projecteur continu d'image X_0 , et si $\text{Im} B$ est fermé et admet un supplémentaire topologique dans Z , alors il existe un opérateur K linéaire continu de $\text{Im} B$ dans X_1 tel que*

$$BK = \text{Id}_{\text{Im} B} \quad \text{et} \quad KB = \text{Id}_X - P.$$

Dém. La restriction de B à X_1 est injective d'image $\text{Im} B$. Donc, pour tout $z \in \text{Im} B$, il existe un unique $x \in X_1$ tel que $z = Bx$. Si on définit l'opérateur K par $Kz = x$, K est évidemment linéaire, et continu d'après le théorème de l'application ouverte; il vérifie par construction l'identité $KBx = x$ pour tout $x \in X_1$. De plus, n'importe quel $x \in X$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_0 + x_1$ avec $x_0 = Px \in \text{Ker} B$ et $x_1 \in X_1$. On a alors $Bx = Bx_1$, d'où $KBx = KBx_1 = x_1 = x - Px$ par définition de K . \square

Ainsi donc, si B est un opérateur satisfaisant les hypothèses de ce lemme, l'équation $Bx = G(x, \xi)$ (avec $G \in \mathcal{C}^1(X \times \mathbb{R}^p; Z)$) équivaut à $G(x, \xi) \in \text{Im} B$ et $B(x_0 + x_1) =$

¹²il suffit en fait que G soit de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $(0, 0)$

¹³Rappelons qu'un supplémentaire topologique d'un sous-espace *fermé* est un supplémentaire au sens algébrique, fermé, sur lequel il existe un projecteur continu.

$G(x_0 + x_1, \xi)$ avec $x_0 = P x \in X_0 = \text{Ker} B$ et $x_1 \in X_1$, c'est-à-dire si Q est un projecteur sur $\text{Im} B$, à $G(x_0 + x_1, \xi) = Q G(x_0 + x_1, \xi)$ et $B x_1 = Q G(x_0 + x_1, \xi)$. En composant à gauche par K , cette dernière équation implique $x_1 = x_1 - P x_1 = K Q G(x_0 + x_1, \xi)$. On arrive ainsi au système :

$$(3.1) \quad \begin{cases} x_1 = K Q G(x_0 + x_1, \xi), \\ 0 = (\text{Id}_Z - Q) G(x_0 + x_1, \xi), \end{cases}$$

Réciproquement, si on a une solution $(x_1, x_0) \in X_1 \times X_0$ de ce système, alors

$$B(x_0 + x_1) = B x_1 = B K Q G(x_0 + x_1, \xi) = Q G(x_0 + x_1, \xi) = G(x_0 + x_1, \xi).$$

Or la première équation du système (3.1) :

$$x_1 = K Q G(x_0 + x_1, \xi)$$

se résout par le théorème des fonctions implicites. En effet, par hypothèse sur G , la fonction

$$F_1 : X_1 \times X_0 \times \mathbb{R}^p \rightarrow X_1 \\ (x_1, x_0, \xi) \mapsto x_1 - K Q G(x_0 + x_1, \xi)$$

est telle que $F_1(0, 0, 0) = 0$ et $\partial_{x_1} F_1(0, 0, 0) = \text{Id}_{X_1}$. Donc il existe une application χ_1 de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $(0, 0)$ telle que $F_1(x_1, x_0, \xi) = 0$ avec (x_1, x_0, ξ) voisin de $(0, 0)$ équivaut à $x_1 = \chi_1(x_0, \xi)$. En substituant cette relation dans la deuxième équation du système (3.1), on voit que la résolution de l'équation de départ $F(x, \xi) = 0$ au voisinage de $(0, 0, 0)$ équivaut à la résolution de

$$(\text{Id}_Z - Q) G(x_0 + \chi_1(x_0, \xi), \xi) = 0$$

au voisinage de $(0, 0)$. Cette dernière équation est trivialement satisfaite dans le cas où $Q = \text{Id}_Z$, c'est-à-dire si $\text{Im} B = Z$. Ce sera le cas dans la démonstration du théorème de la variété stable par cette méthode.

Dém. [Théorème de la variété stable] Sans perte de généralité, on suppose $v = 0$, et on note $A = Df(0)$, $g(u) = f(u) - A u$.

On considère les espaces $X = \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^-)$ et $Z = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^-)$. Alors

$$B : x \in X \mapsto \frac{dx}{dt} - A x$$

définit un opérateur linéaire continu de X dans Z . D'après le lemme 6, on voit que

$$\text{Ker} B = \text{Im} S$$

où

$$S : E^u \rightarrow X \\ \xi \mapsto S \xi : t \in \mathbb{R}^- \mapsto e^{tA} \xi.$$

(En particulier, $\text{Ker} B$ est de dimension finie et admet donc un supplémentaire topologique.) Un projecteur sur $\text{Ker} B$ est simplement donné par

$$P x = S \circ \pi_u x(0).$$

On a bien $P \circ P = P$ puisque $(Px)(0) = \pi_u x(0)$ et donc

$$P(Px) = S \circ \pi_u (Px)(0) = S \circ \pi_u \circ \pi_u x(0) = S \circ \pi_u x(0) = Px.$$

D'autre part, $\text{Im}B = Z$. Soit en effet $z \in Z$. Trouver $x \in X$ tel que $z = Bx$ équivaut à résoudre l'équation différentielle avec terme source :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + z$$

assortie d'une condition à la limite en $-\infty$ (par définition de X , x doit être bornée ainsi que sa dérivée en $-\infty$). Une telle solution s'obtient grâce à une formule de type Duhamel :

$$(3.2) \quad x(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)A} \pi_s z(\tau) d\tau - \int_t^0 e^{(t-\tau)A} \pi_u z(\tau) d\tau, \quad t \leq 0.$$

La première intégrale est bien convergente, et on a la majoration :

$$\left| \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)A} \pi_s z(\tau) d\tau \right| \leq b_\varepsilon \|z\|_Z \int_{-\infty}^t e^{-(\beta-\varepsilon)(t-\tau)} d\tau = \frac{b_\varepsilon}{\beta-\varepsilon} \|z\|_Z.$$

On a aussi une majoration pour la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \int_t^0 e^{(t-\tau)A} \pi_u z(\tau) d\tau \right| &\leq c_\varepsilon \|z\|_Z \int_t^0 e^{(\gamma-\varepsilon)(t-\tau)} d\tau = \frac{c_\varepsilon}{\gamma-\varepsilon} \|z\|_Z (1 - e^{(\gamma-\varepsilon)t}) \\ &\leq \frac{c_\varepsilon}{\gamma-\varepsilon} \|z\|_Z. \end{aligned}$$

Donc la formule (3.2) définit bien une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^- ; le fait que $x'(t) = Ax(t) + z(t)$ découle d'un calcul facile, en se rappelant que $\pi_u + \pi_s = \text{I}_n$; et on déduit une borne pour x' . Donc x appartient à X et vérifie $Bx = z$.

Étant donné $w \in \mathbb{R}^n$ proche de 0, on peut reformuler à l'aide des opérateurs B et S le fait que $x : t \mapsto \phi_t(w)$ appartienne à X . En effet, par définition du flot, x doit être solution du problème de Cauchy :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + g(x), \\ x(0) = w. \end{cases}$$

Ce problème a une solution $x \in X$ si et seulement si $Px = S\xi$ avec $\xi = \pi_u w$ et $x_1 = x - Px \in X_1 := \text{Ker}P$ est solution de

$$Bx_1 = g(S\xi + x_1).$$

D'après le lemme 7, il existe un opérateur K linéaire continu de Z dans X_1 tel que

$$BK = \text{Id}_Z \quad \text{et} \quad KB = \text{Id}_X - P.$$

D'après le calcul fait plus haut, on a même une expression explicite de K donnée par la formule (3.2) :

$$(Kz)(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)A} \pi_s z(\tau) d\tau - \int_t^0 e^{(t-\tau)A} \pi_u z(\tau) d\tau, \quad t \leq 0.$$

Soit alors

$$\begin{aligned} F_1 : X_1 \times E^u &\rightarrow X_1 \\ (x_1, \xi) &\mapsto x_1 - K g(S\xi + x_1). \end{aligned}$$

On a $F_1(0, 0, 0) = 0$ et $\partial_{x_1} F_1(0, 0, 0) = \text{Id}_{X_1}$. Donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à F_1 au voisinage de $(0, 0)$. On en déduit que l'équation $Bx_1 = g(S\xi + x_1)$ admet une solution unique $x_1 = \chi_1(\xi)$ dans un voisinage $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{W} \subset X_1 \times \mathbb{R}^p$ de $(0, 0)$, avec χ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{W} et $\chi_1(0) = 0$, $\partial_\xi \chi_1(0) = 0$ (puisque $Dg(0) = 0$). Par suite, pour tout $w \in \pi_u^{-1}(\mathcal{W})$, le problème de Cauchy (3.3) admet une unique solution $x \in S\mathcal{W} + \mathcal{V}_1 \subset X$, donnée par

$$x = S\xi + \chi_1(\xi), \quad \xi = \pi_u w.$$

En particulier, on a $w = x(0) = \xi + \chi_1(\xi)(0)$. L'application

$$\begin{aligned} h : \mathcal{W} \subset E^u &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \xi &\mapsto h(\xi) = \chi_1(\xi)(0) \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $h(0) = 0$, $\partial_\xi h(0) = 0$. Cela signifie exactement que

$$\{w \in \pi_u^{-1}(\mathcal{W}); t \mapsto \phi_t(w) \in X\} = \{w = \xi + h(\xi); \xi \in \mathcal{W}\}$$

est une variété tangente à E^u . De plus, le voisinage $\mathcal{V} = \pi_u^{-1}(\mathcal{W})$ est tel que

$$\phi_t(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$$

pour tout $t \leq 0$. En effet, pour tout $w \in \pi_u^{-1}(\mathcal{W})$,

$$\pi_u(\phi_t(w)) = S \circ \pi_u w.$$

Or $\|S\| \leq 1$, donc $S(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$ à condition par exemple d'avoir pris une boule pour \mathcal{W} . Par suite, pour tout $w \in \mathcal{V}$, pour tout $\tau \leq 0$, $\phi_\tau(w) \in \mathcal{V}$ et $s \in \mathbb{R}^- \mapsto \phi_s(w)$ appartient à X , donc $t \in \mathbb{R}^- \mapsto \phi_{t+\tau}(w) = \phi_t(\phi_\tau(w))$ appartient à X , ce qui signifie exactement

$$\phi_\tau(W_{\text{loc}}^u) \subset W_{\text{loc}}^u.$$

Pour montrer qu'en fait

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(w) = 0$$

pour $w \in \mathcal{V}$, on va appliquer le théorème de Lyapunov n°3 à l'équation différentielle "réduite" à W_{loc}^u . Pour tout $t \leq 0$ et $w \in \mathcal{V}$, on a en effet, puisque $\phi_t(w) \in W_{\text{loc}}^u$,

$$\phi_t(w) = y(t) + h(y(t)), \quad y(t) := \pi_u(\phi_t(w)).$$

Donc y est solution dans E^u du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_u y + \pi_u \circ g(y + h(y)), \\ y(0) = \pi_u w, \end{cases}$$

où A_u est la matrice de $Df(v) \circ \pi_u$ (qui est un endomorphisme de E^u). Comme A_u a tout son spectre de partie réelle strictement positive, le théorème 12 (en renversant le temps) montre que pour $\pi_u w$ assez proche de 0,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0.$$

Par suite, quitte à réduire \mathcal{W} , on a bien

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(w) = 0$$

pour tout $w \in W_{\text{loc}}^u$. La preuve concernant la variété stable est identique : il suffit de changer f en $-f$. \square

Remarque 8 *Si H est une intégrale première, les variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique v sont contenues dans l'ensemble de niveau*

$$\{u; H(u) = H(v)\}.$$

De plus, en dimension 2, les variétés stables et instables d'un point selle¹⁴ sont des courbes. Par exemple pour l'équation du pendule, la variété instable de $(\pi, 0)^t$ est la réunion des orbites hétéroclines reliant ce point (en $-\infty$) à $(3\pi, 0)^t$ ou à $(-\pi, 0)^t$ (en $+\infty$); tandis que la variété stable du même point est la réunion des orbites hétéroclines reliant $(3\pi, 0)^t$ ou à $(-\pi, 0)^t$ (en $-\infty$) à $(\pi, 0)^t$ (en $+\infty$); toutes ces orbites étant incluses dans l'ensemble de niveau $E = 1$ de l'intégrale première E .

Le théorème de la variété stable est fondamental dans l'étude des propriétés qualitatives des équations différentielles. Nous allons en donner une illustration avec la méthode de Melnikov, qui permet de montrer la persistance d'orbites hétéroclines.

Méthode de Melnikov. Considérons une équation différentielle dans \mathbb{R}^2 , dépendant d'un paramètre $\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^p$ (Ω ouvert) :

$$\frac{du}{dt} = g(u, \omega),$$

avec $g \in \mathcal{C}^1(U \times \Omega)$, U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Un exemple avec $p = 1$ est le système du pendule amorti ($\omega = k$ le taux d'amortissement). On verra plus loin un exemple plus intéressant avec $p = 3$, provenant de la modélisation de transitions de phase.

On note (comme d'habitude) D la différentiation par rapport à u . Commençons par un résultat facile concernant la persistance des points selles.

Lemme 8 *Supposons qu'il existe $u_0 \in U$ et $u_1 \in U$ tels que pour $j = 0$ ou 1 , $g(u_j, \omega_0) = 0$, et $Dg(u_j, \omega_0)$ ait comme valeurs propres λ_j, μ_j , avec*

$$\text{Re } \lambda_j < 0 < \text{Re } \mu_j.$$

¹⁴Par analogie avec le cas linéaire, on appelle point selle un point fixe hyperbolique v où la matrice jacobienne $Df(v)$ a ses valeurs propres de parties réelles de signe opposé.

Alors il existe des voisinages $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et \mathcal{O} de u_0, u_1 et ω_0 respectivement, et des applications $u_- \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}; \mathcal{U}_0), u_+ \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}; \mathcal{U}_1)$, telles que

$$(g(u, \omega) = 0, (u, \omega) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{O}) \iff u = u_+(\omega),$$

$$(g(u, \omega) = 0, (u, \omega) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{O}) \iff u = u_-(\omega).$$

De plus, pour tout $\omega \in \mathcal{O}$, les matrices jacobiniennes $Dg(u_{\pm}(\omega), \omega)$ ont des valeurs propres λ_{\pm}, μ_{\pm} , avec

$$Re \lambda_{\pm} < 0 < Re \mu_{\pm}.$$

Dém. La première partie est une simple application du théorème des fonctions implicites. La seconde utilise la continuité des valeurs propres par rapport à (u, ω) . \square

Dans l'exemple du pendule amorti :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ky - \sin x, \end{cases}$$

les applications u_{\pm} sont en fait triviales : $u_+ \equiv u_1 = (\pi, 0)^t$ et $u_- \equiv u_0 = (-\pi, 0)^t$.

En se plaçant dans le cadre du lemme 8, on suppose de plus qu'il existe une orbite hétérocline reliant u_0 à u_1 pour la valeur ω_0 du paramètre, c'est-à-dire une solution $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ de

$$(3.4) \quad \phi'(t) = g(u, \omega_0), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = u_1.$$

La question est de savoir si, lorsqu'on modifie (légèrement) le paramètre ω , il persiste des orbites hétéroclines reliant les points fixes voisins $u_-(\omega)$ et $u_+(\omega)$. La méthode de Melnikov fournit une condition suffisante, à travers le théorème des fonctions implicites. En effet, elle consiste à exprimer l'existence d'une orbite hétérocline entre $u_-(\omega)$ et $u_+(\omega)$ sous forme d'une équation scalaire

$$\delta(\omega) = 0,$$

et à calculer les dérivées partielles de ω . Dans le cas d'un paramètre scalaire, il n'y a "génériquement", c'est-à-dire si $\frac{d\delta}{d\omega}(\omega_0) \neq 0$, que la valeur ω_0 qui fournisse une orbite hétérocline. On verra que c'est le cas pour le pendule amorti ; ce qu'on sait à l'avance puisque E est strictement décroissante le long des orbites, et a la même valeur aux deux points fixes $(-\pi, 0)^t$ et $(\pi, 0)^t$. La méthode de Melnikov est vraiment intéressante lorsqu'il y a plus d'un paramètre (scalaire).

D'après le théorème de la variété stable¹⁵, pour tout $\omega \in \mathcal{O}$, il existe deux courbes $W^u(\omega)$ et $W^s(\omega)$ "proches" de l'orbite $\gamma = \{\phi(t); t \in \mathbb{R}\}$, l'une est la variété instable issue de u_- et l'autre la variété stable issue de $u_+(\omega)$, pour l'équation

$$\frac{du}{dt} = g(u, \omega).$$

¹⁵Plus précisément, on invoque le théorème de la variété centrale-stable pour le système augmenté, comme au §2.6, de l'équation $\frac{d\omega}{dt} = 0$; passons sur ce théorème, valable pour des points fixes non hyperboliques et qui se démontre essentiellement comme celui de la variété stable, en remplaçant les espaces de fonctions bornées par des espaces de fonctions exponentiellement croissantes, et le projecteur π_u par π_{cu} , toujours complémentaire de π_s .

En particulier, si Σ est une *section locale* en $\phi(0)$, $W^u(\omega)$ et $W^s(\omega)$ intersectent (transversalement) Σ en des points $y_0(\omega)$ et $y_1(\omega)$ respectivement. L'existence d'une orbite hétérocline joignant $u_-(\omega)$ à $u_+(\omega)$ équivaut alors à

$$y_0(\omega) = y_1(\omega),$$

ou encore à la relation scalaire :

$$(3.5) \quad \delta(\omega) = 0,$$

$$\delta(\omega) := \phi'(0) \wedge (y_0(\omega) - y_1(\omega)).$$

La fonction δ est parfois appelée fonction (de séparation) de Melnikov, mesurant une sorte de distance entre les variétés $W^u(\omega)$ et $W^s(\omega)$. Comme $y_1(\omega_0) = y_0(\omega_0) = \phi(0)$, on a bien sûr $\delta(\omega_0) = 0$. La force de la méthode réside dans l'évaluation des dérivées partielles de δ .

Lemme 9 *Dans le cadre du lemme 8, si ϕ est solution de (3.4), et σ désigne l'une quelconque des composantes de ω , la fonction δ définie ci-dessus vérifie :*

$$\frac{\partial \delta}{\partial \sigma}(\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_0^s \text{tr D}g(\phi(\tau), \omega_0) d\tau} g(\phi(s), \omega_0) \wedge \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\phi(s), \omega_0) ds.$$

Dém. Par définition de $y_0(\omega)$ et $y_1(\omega)$, les applications ϕ_0 et ϕ_1 définies respectivement par

$$\begin{aligned} \phi_0'(t) &= g(\phi_0(t), \omega) \quad \forall t \leq 0, & \phi_0(0) &= y_0(\omega), \\ \phi_1'(t) &= g(\phi_1(t), \omega) \quad \forall t \geq 0, & \phi_1(0) &= y_1(\omega), \end{aligned}$$

vérifient

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_0(t) = u_-(\omega) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_1(t) = u_+(\omega).$$

De plus, on a (si toutes les composantes de ω sauf σ coïncident avec celles de ω_0),

$$\phi_j(t) = \phi(t) + (\sigma - \sigma_0) \chi_j(t) + \mathcal{O}((\sigma - \sigma_0)^2),$$

où les applications χ_0 et χ_1 sont définies et bornées sur \mathbb{R}^- et sur \mathbb{R}^+ respectivement par

$$\chi_j'(t) = \text{D}g(\phi(t), \omega_0) \chi_j(t) + \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\phi(t), \omega_0), \quad \chi_j(0) = \frac{\partial y_j}{\partial \sigma}(\omega_0).$$

On a donc en particulier :

$$\frac{\partial \delta}{\partial \sigma}(\omega_0) = \phi'(0) \wedge (\chi_0(0) - \chi_1(0)).$$

Pour évaluer ce nombre, introduisons :

$$\Delta_j(t) := \phi'(t) \wedge \chi_j(t) = g(\phi(t), \omega_0) \wedge \chi_j(t)$$

pour $j = 0$ ou 1 . On a

$$\frac{d}{dt} \Delta_j(t) = (\text{D}g(\phi(t), \omega_0) \cdot \phi'(t)) \wedge \chi_j(t) + g(\phi(t), \omega_0) \wedge \chi_j'(t)$$

$$= (\operatorname{tr} \operatorname{D}g(\phi(t), \omega_0)) \Delta_j(t) + g(\phi(t), \omega_0) \wedge \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\phi(t), \omega_0).$$

Soit $a(t) = \operatorname{tr} \operatorname{D}g(\phi(t), \omega_0)$. On a

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} a(t) = \lambda_0 + \mu_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \lambda_1 + \mu_1$$

et

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathcal{O}(e^{\mu_0 t}), & t \rightarrow -\infty, \\ \phi(t) &= \mathcal{O}(e^{\lambda_1 t}), & t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

On en déduit facilement¹⁶

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Delta_0(t) e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta_1(t) e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau} = 0,$$

d'où les formules pour $\Delta_0(0)$ et $\Delta_1(0)$:

$$\begin{aligned} \Delta_0(0) &= \int_{-\infty}^0 e^{-\int_0^s a(\tau) d\tau} g(\phi(s), \omega_0) \wedge \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\phi(s), \omega_0) ds, \\ \Delta_1(0) &= - \int_0^{\infty} e^{-\int_0^s a(\tau) d\tau} g(\phi(s), \omega_0) \wedge \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\phi(s), \omega_0) ds. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\partial \delta}{\partial \sigma}(\omega_0) = \Delta_0(0) - \Delta_1(0),$$

on en déduit la formule annoncée. □

Application aux transitions de phase. Certaines transitions de phase (liquide-vapeur ou dans un matériau élastique) peuvent être décrites au moyen d'un système d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x(p(v)) = \mu \partial_{xx}^2 u - \varepsilon \partial_{xxx}^3 v, \end{cases}$$

où v représente le volume spécifique (c'est-à-dire par unité de masse) du matériau et u sa vitesse. Le paramètre $\mu \geq 0$ est un coefficient de *viscosité* et $\varepsilon > 0$ est un coefficient de *capillarité*. Des transitions de phase se produisent lorsque la fonction $v \mapsto p(v)$ n'est pas monotone. On suppose pour fixer les idées $p(v) = v(1-v)(2v-1)$: ce n'est pas une loi physique (les dimensions ne sont même pas respectées !) mais elle en a les propriétés qualitatives (voir les détails physiques en note de bas de page). En particulier, la primitive f de $-p$ s'annulant en 0 admet deux puits, l'un en 0 et l'autre en 1, appelés *points de Maxwell*. Ce sont exactement ceux que l'on s'attend à voir coexister dans un état stationnaire.¹⁷ Il existe bel et bien une solution stationnaire des É.D.P. ci-dessus valant 0

¹⁶On rappelle le petit résultat de comparaison entre primitives : si $a(t) \stackrel{t \rightarrow \pm\infty}{\asymp} \mathcal{O}(b(t))$ avec $b(t)$ de signe constant et $\int_0^t b(\tau) d\tau$ divergente, alors $\int_0^t a(\tau) d\tau = \mathcal{O}\left(\int_0^t b(\tau) d\tau\right)$.

¹⁷Ce type de fonction à double puits se rencontre également dans les modèles de réaction-diffusion... Pour les transitions de phase liquide-vapeur, p est la pression du fluide, donnée par une loi d'état de type van der Waal sous la température critique : elle est monotone décroissante sur les intervalles $]b, \alpha[$ (correspondant à la phase liquide) et $]\beta, +\infty[$ (correspondant à la phase vapeur) mais croissante sur $]\alpha, \beta[$, qui est une zone physiquement et mathématiquement instable, inobservable. La fonction f est l'énergie libre spécifique (elle est définie à une constante près) et elle admet une bitangente, qui définit les points de Maxwell.

en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, qui représente la transition entre les deux phases, comme le montre le calcul suivant. Une solution stationnaire est par définition une solution du système d'É.D.O :

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = 0, \\ \frac{d}{dx}(p(v)) = \mu \frac{d^2u}{dx^2} - \varepsilon \frac{d^3v}{dx^3}, \end{cases}$$

qui implique $u = \text{constante}$ et par conséquent

$$p(v) + \varepsilon \frac{d^2v}{dx^2} = \text{constante}.$$

Si v converge suffisamment vite en $\pm\infty$, toutes ses dérivées sont nulles, et il faut donc

$$p(v) + \varepsilon \frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre admettant de façon "évidente" $\frac{dv}{dx}$ comme facteur intégrant. En effet, multipliant par $\frac{dv}{dx}$ et en intégrant "à vue" entre $-\infty$ et x , obtient :

$$\frac{1}{2} \varepsilon (\partial_x v)^2 = - \int_0^v p(w) dw = f(v).$$

Comme ε est strictement positif, f est à valeurs positives, nulles seulement aux puits 0 et 1, c'est un exercice facile de montrer que les solutions du problème

$$\varepsilon \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = f(v), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 1$$

existent et forment une famille à un paramètre. Il suffit pour cela de remarquer que la fonction $\sqrt{2f/\varepsilon}$ est Lipschitzienne, et donc que les théorèmes classiques s'appliquent à

$$\frac{dv}{dx} = \sqrt{\frac{2f(v)}{\varepsilon}}.$$

Comme 0 et 1 sont les seuls points fixes, toute solution de condition initiale appartenant à $]0, 1[$ est globale et satisfait les conditions aux limites voulues. Fixons l'une d'entre elles, \underline{v} . Alors toutes les fonctions $x \mapsto \underline{v}(x - x_0)$ sont aussi des solutions. On montre aussi qu'il n'y en a pas d'autre, c'est-à-dire que deux solutions v_1 et v_2 du problème sont forcément translatées l'une de l'autre. Car, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x_2 tel que $v_2(x_2) = v_1(0)$ et donc l'application $x \mapsto v_2(x + x_2)$ est solution du même problème de Cauchy que v_1 . D'après l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces applications sont par conséquent égales.

Ces considérations sur les solutions stationnaires étant faites, on fixe \underline{v} comme ci-dessus et on va chercher des solutions *ondes progressives* "proches" de \underline{v} , c'est-à-dire des solutions ne dépendant que de $x - \sigma t$ avec σ petit et ayant pour comportements asymptotiques :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, t) = v_- \approx 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x, t) = v_+ \approx 1.$$

Ceci revient à chercher des orbites hétéroclines du système

$$\begin{cases} \sigma \frac{dv}{d\xi} + \frac{du}{d\xi} = 0, \\ -\sigma \frac{du}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(p(v)) = \mu \frac{d^2u}{d\xi^2} - \varepsilon \frac{d^3v}{d\xi^3}, \end{cases}$$

avec $\eta := \mu/\sqrt{\varepsilon}$ (par un changement d'échelle ou en cherchant directement des solutions comme fonctions de $\xi := (x - \sigma t)/\sqrt{\varepsilon}$). L'élimination de u et une première intégration à vue sont encore possibles. On se ramène ainsi à l'équation en v :

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} + \sigma \eta \frac{dv}{d\xi} + p(v) - p(v_-) + \sigma^2(v - v_-) = 0.$$

Cette nouvelle équation différentielle n'admet pas de facteur intégrant, et c'est tout l'intérêt de la méthode de Melnikov pour chercher des orbites hétéroclines. On peut en effet appliquer cette méthode avec comme paramètre $\omega = (\sigma, v_-)$, en écrivant l'équation sous forme d'un système du premier ordre dans le plan de phase :

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} = w, \\ \frac{dw}{d\xi} = -\sigma \eta w - p(v) + p(v_-) - \sigma^2(v - v_-). \end{cases}$$

Le champ

$$g(v, w; \sigma, v_-) = \begin{pmatrix} w, \\ -\sigma \eta w - p(v) + p(v_-) - \sigma^2(v - v_-) \end{pmatrix}$$

est tel que

$$g(\underline{v}, \underline{w}; 0, 0) \wedge \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\underline{v}, \underline{w}; 0, 0) = -\eta \underline{w}^2 < 0.$$

Par conséquent, d'après le lemme 9 et le théorème des fonctions implicites, pour tout σ proche de 0 il existe v_- proche de 0, et v_+ proche de 1 relié à v_- par une orbite hétérocline.

4 Comportement asymptotique des solutions

On va s'intéresser ici au comportement général des solutions lorsque $t \rightarrow +\infty$. Le cas $t \rightarrow -\infty$ s'en déduit par symétrie. Rappelons la

Définition 11 *Si $v \in U$ admet une orbite $\{\phi_t(v)\}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on appelle ensemble ω -limite l'ensemble $L_\omega(v)$ des valeurs d'adhérence de cette orbite.*

On peut ajouter à la proposition 6 l'observation suivante, facile mais fort utile.

Proposition 7 (Principe d'invariance de LaSalle) *Si F est une fonction de Lyapunov (le long de l'orbite $\{\phi_t(v)\}$), alors $L_\omega(v)$ est inclus dans un ensemble de niveau de F .*

Dém. La fonction $t \mapsto F(\phi_t(v))$ étant monotone, elle admet une limite a en $+\infty$. Si $y \in L_\omega(v)$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(v) = y.$$

Par continuité de F , on en déduit

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(\phi_{t_n}(v)) = F(y),$$

d'où $L_\omega(v) \subset \{y; F(y) = a\}$. □

Une autre propriété, souvent utile lorsqu'on dispose d'estimations *a priori*, est la suivante.

Proposition 8 *Si l'orbite $\{\phi_t(v)\}$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et relativement compacte dans U , alors $L_\omega(v)$ est compact non vide et connexe.*

Dém. La compacité de $L_\omega(v)$ est quasi-immédiate : c'est un fermé inclus dans le compact

$$\overline{\{\phi_t(v); t \in \mathbb{R}^+\}}.$$

Il est non vide puisque l'orbite $\{\phi_t(v); t \in \mathbb{R}^+\}$ admet au moins une valeur d'adhérence. La connexité de $L_\omega(v)$ demande un peu plus de travail. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que

$$L_\omega(v) \subset U_1 \cup U_2, \quad L_\omega(v) \cap U_i \neq \emptyset.$$

Par définition de $L_\omega(v)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc une suite (τ_n) strictement croissante telle que $\phi_{\tau_{2n}}(v) \in U_2$, $\phi_{\tau_{2n+1}}(v) \in U_1$. Comme l'ensemble $\{\phi_t(v); \tau_{2n} \leq t \leq \tau_{2n+1}\}$ est connexe (image d'un connexe par une application continue !), il ne peut être inclus dans $U_1 \cup U_2$. Donc il existe $t_n \in]\tau_{2n}, \tau_{2n+1}[$ tel que $\phi_{t_n}(v) \notin U_1 \cup U_2$. Or la suite $\phi_{t_n}(v)$ admet une valeur d'adhérence $a \in L_\omega(v)$, et cette limite appartient au complémentaire de $U_1 \cup U_2$ (car c'est un fermé). Ceci contredit l'inclusion $L_\omega(v) \subset U_1 \cup U_2$. C'est donc que de tels ouverts U_1 et U_2 n'existent pas, ce qui montre que $L_\omega(v)$ est connexe. □

Remarque 9 *Inversement, si $L_\omega(v)$ est compact et non vide, l'orbite*

$$\{\phi_t(v); t \in \mathbb{R}^+\}$$

est relativement compacte, puisqu'elle admet au moins une valeur d'adhérence, et toutes ses valeurs d'adhérence sont incluses dans le compact $L_\omega(v)$.

Pour aller plus loin il faut ajouter à notre trousse à outils la notion importante de *section*.

Définition 12 *On appelle section locale du champ f en un point non singulier y (c'est-à-dire tel que $f(y) \neq 0$), un ouvert S d'une hypersurface contenant y tel que pour tout $u \in S$, $f(u) \notin T_u S$ (on dit aussi que $f(u)$ est transverse à $T_u S$).*

On pourra en fait se contenter de sections planes $S \subset y + H$ (hyperplan affine passant par y) avec $f(u) \notin H$. Une telle section existe pour tout hyperplan H ne contenant pas $f(y)$. En effet, si $(e_1, \dots, e_{n-1}, f(y))$ est une base de \mathbb{R}^n alors

$$\det(e_1, \dots, e_{n-1}, f(u)) \neq 0$$

pour tout u assez proche de y .

Proposition 9 *Si $f(y) \oplus H = \mathbb{R}^n$, alors il existe un voisinage $] -\tau, \tau[\times B(0, r)$ de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R} \times H$ tel que*

$$\begin{aligned} \Phi :] -\tau, \tau[\times B(0, r) &\rightarrow \mathcal{V} := \Phi(] -\tau, \tau[\times B(0, r)) \subset U \\ (t, h) &\mapsto \phi_t(y + h) \end{aligned}$$

soit un difféomorphisme. En particulier, $S := y + B(0, r)$ est une section locale incluse dans \mathcal{V} (appelé boîte à flot). Et pour tout $v \in \mathcal{V}$, il existe un unique $t \in] -\tau, \tau[$ tel que $\phi_t(v) \in S$.

Dém. La première partie est une simple application du théorème d'inversion locale. En effet, la différentielle de Φ au point $(0, 0)$ est donnée par

$$d\Phi(0, 0) \cdot (s, k) = s f(y) + k.$$

Elle est donc inversible, ainsi que $d\Phi(t, h)$ pour tout $(t, h) \in] -\tau, \tau[\times B(0, r)$ pourvu que τ et r soient assez petits. Le fait que $S = y + B(0, r)$ soit une section locale est une conséquence de l'inversibilité de $\Phi(0, h)$ pour $h \in B(0, r)$, puisque

$$d\Phi(0, h) \cdot (s, k) = s f(y + h) + k \quad \forall (s, k) \in \mathbb{R} \times H.$$

Enfin, si $v \in \mathcal{V}$, il existe un unique $(t, h) \in] -\tau, \tau[\times B(0, r)$ tel que

$$\phi_t(y + h) = v.$$

Donc

$$\phi_s(v) = \phi_{s+t}(y + h) = \phi_0(y + h') \in S$$

si et seulement si $s = -t$ et $h = h'$. □

Remarque 10 *Le difféomorphisme inverse Φ^{-1} opère un redressement du flot. En effet, l'image réciproque d'une orbite $\{\phi_t(v); t \in] -\tau, \tau[\}$ avec $v = y + h \in S$ n'est autre que le segment de droite $\{(t, h); t \in] -\tau, \tau[\}$.*

4.1 Cas des équations différentielles dans le plan

Dans \mathbb{R}^2 , les sections locales "planes" sont des segments de droite, en particulier orientables, ce qui jouera un rôle essentiel dans la suite. De plus, on dispose du

Théorème 16 (de Jordan) *Une courbe fermée simple divise le plan en deux régions connexes, l'une bornée et l'autre non bornée.*

Grâce à ce résultat topologique, on montre facilement le

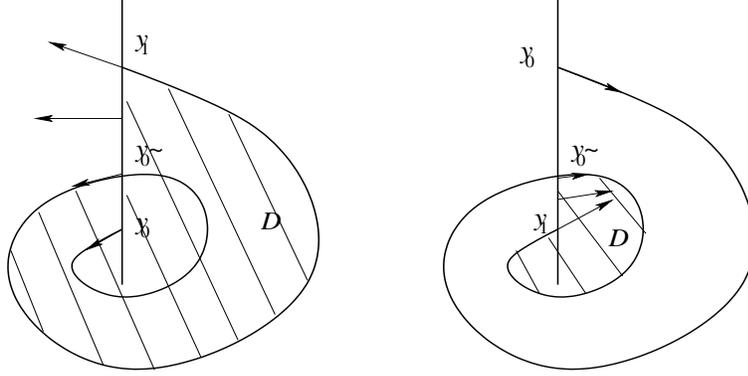


Figure 8: Flot et section; composante D en hachuré.

Lemme 10 *Si S est une section locale, si (t_n) est une suite croissante telle que $y_n = \phi_{t_n}(v) \in S$, alors la suite (y_n) est aussi monotone le long de S , c'est-à-dire*

$$\det(y_{n+1} - y_n, y_n - y_{n-1}) \geq 0.$$

Dém. Il suffit de faire la preuve pour trois points y_0, y_1, y_2 . Fixons donc $y_0 = \phi_{t_0}(v)$ et $y_1 = \phi_{t_1}(v)$ appartenant à S avec $t_0 < t_1$ et $y_0 \neq y_1$. On peut supposer que l'orbite de v ne coupe pas S dans l'intervalle $I := [y_0, y_1]$: si tel était le cas, on remplacerait y_0 par $\tilde{y}_0 = \phi_{\tilde{t}_0}(y_1)$ le premier point appartenant à S en partant de y_1 dans le sens des $t < t_1$ (cf Figure 8), car montrer que y_0, y_1 et $y_2 = \phi_{t_2}(v)$, $t > t_1$ sont ordonnés revient à montrer que \tilde{y}_0, y_1 et y_2 le sont.

Soit \mathcal{C} la courbe formée de la réunion de I et de $\{\phi_s(v); s \in [t_0, t_1]\}$. C'est une courbe fermée, simple grâce à la précaution que l'on a prise et au fait qu'une orbite ne s'intersecte pas elle-même. Donc d'après le théorème 16, elle divise le plan en deux composantes connexes. Soit D celle qui est bornée. Puisque S est une section, le champ f pointe vers le même demi-plan le long de S , et en particulier le long de I . En particulier, il pointe soit vers D soit vers $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Quitte à renverser le temps (et échanger y_0 et y_1), on peut supposer qu'on est dans le second cas. Alors D est négativement invariant par le flot, c'est-à-dire que pour tout $y \in D$, $\phi_t(y) \in D$ pour $t < 0$. En effet, le flot ne peut sortir ni par I ni par $\{\phi_t(v); t \in [t_0, t_1]\}$. Ceci implique en particulier que $\phi_t(y_1)$ appartient à $\mathbb{R}^2 \setminus D$ pour tout $t > t_1$. De plus, $S \setminus I$ est constitué de deux intervalles I_0 et I_1 contenant respectivement y_0 et y_1 dans leur bord. Or on peut joindre tout point de I_0 assez proche de y_0 à $\phi_{-\varepsilon}(y_0)$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, point appartenant à D , sans passer par le bord de D , on en déduit que I_0 est dans D . Donc, si $y_2 = \phi_{t_2}(v) \in S$ et $t > t_2$, y_2 appartient nécessairement à I_1 . \square

Corollaire 1 *Si S est une section locale, pour tout $v \in U$, $L_\omega(v) \cap S$ contient au plus un point.*

Dém. Supposons que $L_\omega(v) \cap S$ contienne deux points distincts, y_1 et y_2 . Soient alors des boîtes à flot disjointes, $\mathcal{V}_1 \ni y_1$ et $\mathcal{V}_2 \ni y_2$. Comme ces points sont dans $L_\omega(z)$, l'orbite z repasse une infinité de fois dans chacune de ces boîtes, et donc aussi par chacun des intervalles $I_1 = \mathcal{V}_1 \subset S$ et $I_2 = \mathcal{V}_2 \subset S$. Plus précisément, il existe une suite (t_n) , croissante et tendant vers $+\infty$ avec n , telle $\phi_{t_{2n+1}}(v) \in I_1$ et $\phi_{t_{2n}}(v) \in I_2$. Comme I_1 et I_2 sont disjoints, ceci contredit le lemme 10. \square

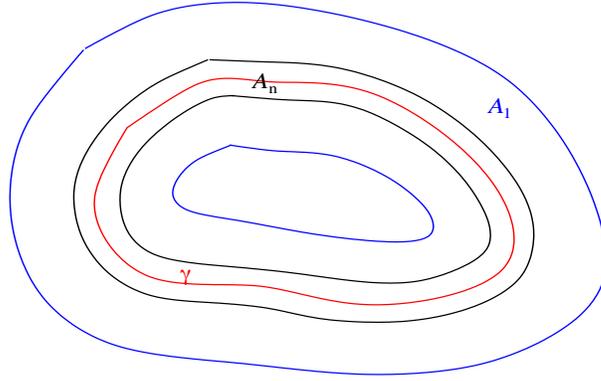


Figure 9: Voisinages tubulaires A_n de γ .

On peut déduire de ces résultats une description très précise des ensembles ω -limite. C'est l'objet du

Théorème 17 (de Poincaré-Bendixson) *Si $L_\omega(v)$ est compact non vide et sans point fixe alors c'est un cycle.*

Dém. [Théorème de Poincaré-Bendixson] Supposons $L_\omega(v)$ compact et $y \in L_\omega(v)$. On va montrer que l'orbite de y , qui est incluse dans $L_\omega(v)$, est un cycle. On considère pour cela $L_\omega(y)$, qui est un sous-ensemble non vide de $L_\omega(v)$. Soit alors $z \in L_\omega(y)$, S une section locale en z et \mathcal{Z} une boîte à flot associée. Il existe une suite (t_n) tendant vers $+\infty$ telle que $\phi_{t_n}(y)$ appartienne au voisinage \mathcal{Z} de z pour tout n . En particulier, il existe des instants t_n et t_m distants de plus de 2τ , et des instants s_n et $s_m \in]-\tau, \tau[$ (avec τ comme dans proposition 9) tels que $\phi_{t_n+s_n}(y)$ et $\phi_{t_m+s_m}(y)$ appartiennent à S . D'après le corollaire 1, ceci implique

$$\phi_{t_n+s_n}(y) = \phi_{t_m+s_m}(y).$$

Comme $t_n + s_n \neq t_m + s_m$, et que y n'est pas un équilibre, l'orbite de y est donc un cycle γ (voir la proposition 5), et $\gamma \subset L_\omega(v)$.

Pour prouver que $L_\omega(v)$ est égal à au cycle γ , raisonnons par l'absurde. Supposons γ strictement inclus dans $L_\omega(v)$. Soit $y_0 \in L_\omega(v)$, $y_0 \notin \gamma$, et n_0 tel que

$$1 < 2^{n_0} \text{dist}(y_0, \gamma).$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n := \bigcup_{z \in \gamma} B(z, 1/2^n).$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $y_0 \notin \overline{A_n}$. De plus, pour tout $n \geq n_0$, il existe y_n tel que

$$y_n \in L_\omega(v) \cap A_n \quad \text{et} \quad y_n \notin \gamma.$$

En effet, supposons que pour tout $y \in L_\omega(v)$, ou bien $y \in \gamma$ ou bien $y \notin A_n$. Comme le complémentaire de $\overline{A_{n+1}}$ contient le complémentaire de A_n (ça va mieux avec un dessin !, cf Figure 9), et $\gamma \subset A_{n+2}$, $y_0 \in L_\omega(v) \cap (U \setminus \overline{A_{n+1}})$, on aurait alors

$$L_\omega(v) \subset A_{n+2} \cup (U \setminus \overline{A_{n+1}}), \quad L_\omega(v) \cap A_{n+2} \neq \emptyset, \quad L_\omega \cap (U \setminus \overline{A_{n+1}}) \neq \emptyset.$$

Les ensembles A_{n+2} et $(U \setminus \overline{A_{n+1}})$ étant ouverts, cela contredirait la connexité de $L_\omega(v)$ (voir la proposition 8).

Maintenant, par compacité de $L_\omega(v)$, la suite (y_n) admet une sous-suite convergente vers un point z et par construction de (y_n) , $\text{dist}(z, \gamma) = 0$, donc $z \in \gamma$ puisque γ est compact. Pour simplifier, on note encore (y_n) la suite extraite. Soit S une section locale en z et \mathcal{Z} une boîte à flot associée. Pour n assez grand, $y_n \in \mathcal{Z}$, donc il existe $s_n \in]-\tau, \tau[$ tel que $x_n := \phi_{s_n}(y_n) \in S$, et $x_n \neq z$ puisque $y_n \notin \gamma$. Comme $y_n \in L_\omega(v)$, on a aussi $x_n \in L_\omega(v)$. Autrement dit, z et x_n sont deux points distincts de $L_\omega(v) \cap S$. Ceci est en contradiction avec le corollaire 1.

C'est donc que notre hypothèse était absurde : on a nécessairement

$$\gamma = L_\omega(v).$$

□

Index

équation

- augmentée, 12, 26
- autonome, 1
- aux variations, 17
- de Riccati, 9
- homogène, 9
- linéaire, 9

capillarité, 49

- centre, 36
- champ complet, 12
- courbe intégrale, 12
- cycle, 24

facteur intégrant, 21

- flot, 15
- foyer, 36

Hamiltonien

- système, 2

intégrale première, 2, 20

Lyapunov

- fonction forte de, 30
- fonction de, 29

Lyapunov-Schmidt

- méthode de, 39, 41

Maxwell

- points de, 49

Newton

- loi de, 1
- nœud, 36

onde

- progressive, 50

orbite, 20

- homocline, 24
- hétérocline, 24

phase

- plan de, 1
- portrait de, 20

point

- d'équilibre, 24

fixe, 24

singulier, 24

stationnaire, 24

point selle, 36, 46

puits, 36

redressement

du flot, 53

résolvante, 18

section locale, 47

semi-groupe, 20

solution

globale, 8

locale, 8

maximale, 8

source, 36

sous-espace instable, 40

sous-espace stable, 40

stabilité, 27

asymptotique, 27

non-linéaire, 33

spectrale, 33

système

gradient, 31

Hamiltonien, 2

terme source, 9

trajectoire, 8

variété

instable, 41

stable, 41

viscosité, 49

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Mécanique	1
1.2	Électricité	2
1.3	Chimie	3
1.4	Écologie	4
2	Résolution théorique du problème de Cauchy	4
2.1	Préliminaire	4
2.2	Existence et unicité locale	5
2.3	Solutions maximales	8
2.4	Explosion des solutions	8
2.4.a	Cas des équations différentielles “linéaires”	9
2.4.b	Cas des équations différentielles autonomes	12
2.5	Dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales	14
2.5.a	Cas des équations différentielles linéaires	18
2.5.b	Cas des équations différentielles autonomes	20
2.6	Dépendance des solutions par rapport à un paramètre	25
3	Stabilité des points d’équilibre	26
3.1	Stabilité asymptotique	26
3.2	Stabilité structurelle	34
4	Comportement asymptotique des solutions	50
4.1	Cas des équations différentielles dans le plan	52