

Introduction aux équations aux dérivées partielles

(préparation à l'épreuve de modélisation de l'agrégation)

Sylvie Benzoni*

18 janvier 2005

1 Notions de base

Au delà des équations différentielles ordinaires, où les inconnues dépendent d'une seule variable (souvent le temps), de nombreux modèles s'expriment au moyen d'équations aux dérivées partielles, et ce dès que les inconnues dépendent d'au moins deux variables : ces variables peuvent être des variables d'espace seulement (cas d'un problème stationnaire multidimensionnel) ou des variables d'espace et de temps (cas d'un problème d'évolution mono ou multi-dimensionnel). Il existe une telle variété d'É.D.P. qu'il n'est guère raisonnable de vouloir les considérer dans leur ensemble. Si l'on se risque à écrire la forme générale d'une É.D.P, on obtient quelque chose d'assez abscons, à savoir :

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, D\mathbf{U}, \dots, D^n\mathbf{U}) = 0,$$

où le vecteur \mathbf{X} , de composantes $(x_0, x_1, \dots, x_d) = (t, \mathbf{x})$ en abrégé, représente ce qu'on appelle parfois les variables indépendantes, tandis que les composantes du vecteur \mathbf{U} représentent les inconnues (parfois appelées variables dépendantes), qui sont en fait des fonctions de \mathbf{X} , et pour tout k entier, $D^k\mathbf{U}$ est la différentielle k -ième de \mathbf{U} par rapport à \mathbf{X} . La fonction F est elle-même à valeurs vectorielles en général. Il existe une théorie *algébrique* des É.D.P. dans ce cadre abstrait (en particulier, cette théorie permet de rechercher les *groupes de symétrie* de façon systématique). En revanche, du point de vue de l'analyse (existence et unicité des solutions, dépendance par rapport aux données, initiales et/ou aux limites), on ne peut rien dire d'une É.D.P. générale. C'est pourquoi l'analyse des É.D.P. est une discipline extrêmement vaste, qui fait appel à des outils variés, dépendant du type d'É.D.P. considéré.

On distingue habituellement trois grands types d'É.D.P., comme il y a trois types de coniques (l'analogie étant à mon humble avis un peu tirée par les cheveux). Si l'on s'intéresse à des phénomènes de propagation d'ondes, il faut au moins rajouter un type, que j'appellerai *dispersif*. C'est un terme que l'on expliquera plus loin, et on verra que certaines É.D.P. de type hyperbolique sont aussi dispersives. Le tableau suivant donne des exemples simples (fondamentaux) d'équations *linéaires* pour chacun de ces quatre types. Par convention, la colonne dispersive est réservée aux É.D.P. dispersives qui ne sont pas hyperboliques au sens classique du terme. Il se trouve que les exemples choisis d'É.D.P. dispersives ont de plus une *structure Hamiltonienne*, en un sens fonctionnel que l'on précisera également. On pourrait bien sûr mélanger les genres mais on s'en tiendra là.

La notation u ou \mathbf{u} représente toujours une inconnue, de même que p si nécessaire, les autres notations correspondent à des paramètres physiques. Les opérateurs différentiels ∇ , Δ , etc. agissent en variable d'espace seulement.

Il n'est pas question de développer ici l'analyse de toutes ces équations. On se concentrera sur certains phénomènes, et notamment la propagation d'ondes. À ce propos, les équations de type elliptique sont hors sujet, de même que l'équation de la chaleur. En effet, malgré son apparente similitude avec l'équation de Schrödinger, cette équation a des propriétés tout à fait différentes. Les éléments développés ci-après devraient clarifier cette assertion.

Type	Elliptique	Parabolique	Hyperbolique	Dispersif
Particularités	Problèmes stationnaires	Problèmes d'évolution avec effet régularisant	Problèmes d'évolution avec propagation à vitesse finie	Problèmes d'évolution Hamiltoniens
Équations scalaires	Laplace : $\Delta u = 0$ Poisson : $\Delta u = f$ Helmoltz : $\Delta u + k^2 u = 0$	chaleur/diffusion : $\partial_t u = \kappa \Delta u \quad (\kappa > 0)$	transport : $\partial_t u + a \cdot \nabla u = 0$ ondes : $\partial_{tt}^2 u - c^2 \Delta u = 0$ Klein-Gordon : $\partial_{tt}^2 u - c^2 \Delta u + k u = 0$	Korteweg-de Vries : $\partial_t u + c \partial_x u + k \partial_{xxx}^3 u = 0$ Boussinesq : $\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u + k \partial_{xxxx}^4 u = 0$
Systèmes	Stokes : $\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases}$	diffusion multi-espèces : $\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} \quad (\mathbf{M} \text{ définie positive})$	acoustique : $\begin{cases} \partial_t p + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \end{cases}$ + Maxwell, élasticité, etc.	Schrödinger : $i \hbar \partial_t u = \Delta u \quad (u \in \mathbb{C})$

Tableau 1: É.D.P. linéaires types.

Ondes planes.

On suppose que les variables spatiales sont représentées par un vecteur \mathbf{x} de \mathbb{R}^d (généralement, $d = 1, 2$ ou 3 !).

- On appelle *onde plane* une fonction dépendant seulement de t et de $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$, pour un certain $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^d)^*$, identifié à un vecteur de \mathbb{R}^d appelé *vecteur d'onde*. Par définition, une onde plane est donc constante sur les hyperplans orthogonaux au vecteur d'onde.
- Si de plus, $u(\mathbf{x}, t) = \underline{u}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$, on parle d'*onde plane progressive*. Sa vitesse de propagation est $c = \omega / \|\boldsymbol{\xi}\|$, ce qui signifie que $u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x} - ct \mathbf{n}, 0)$, $\mathbf{n} := \boldsymbol{\xi} / \|\boldsymbol{\xi}\|$.
- On appelle *onde plane progressive monochromatique* une onde de la forme

$$u(\mathbf{x}, t) = \underline{u} e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

Le nombre ω est appelé *pulsation* de l'onde, $\zeta := \omega / 2\pi$ est sa *fréquence* (c'est-à-dire l'inverse de sa période temporelle) et $\lambda := 2\pi / \|\boldsymbol{\xi}\|$ est sa *longueur d'onde* (c'est-à-dire sa période spatiale dans la direction $\mathbf{n} = \boldsymbol{\xi} / \|\boldsymbol{\xi}\|$).

Dispersion. En recherchant les ondes planes progressives monochromatiques d'une É.D.P. linéaire, on obtient une équation pour $(\boldsymbol{\xi}, \omega)$, appelée *relation de dispersion*. Lorsque cette équation se résout sous la forme $\omega = \omega(\boldsymbol{\xi})$, on définit alors deux vitesses vectorielles :

- la *vitesse de phase*

$$\mathbf{v}_\varphi := \frac{\omega(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|},$$

qui n'est autre que $c \mathbf{n}$ avec les notations utilisées plus haut,

- la *vitesse de groupe*

$$\mathbf{v}_g := \nabla \omega,$$

où l'opérateur ∇ agit ici sur la variable $\boldsymbol{\xi}$.

Lorsque $\mathbf{v}_\varphi \neq \mathbf{v}_g$, l'É.D.P. sous-jacente est dite *dispersive*. On parle aussi d'*onde dispersive*. On verra plus loin ce que signifie la dispersion en terme de *train d'onde* (de la forme $u(\mathbf{x}, t) = \underline{u}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, où le graphe de \underline{u} est une courbe en cloche étalée sur plusieurs longueurs d'onde). On dit aussi parfois que l'É.D.P. est dispersive dès que la vitesse \mathbf{v}_φ dépend de $\boldsymbol{\xi}$.

Exemples.

Chaleur vs Schrödinger : La relation de dispersion pour l'équation de la chaleur est

$$i\omega + \kappa \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = 0,$$

qui n'admet pas de solution non triviale $(\boldsymbol{\xi}, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ pour $\kappa \neq 0$. Autrement dit : *l'équation de la chaleur n'admet pas de solution sous forme d'onde monochromatique non triviale*. En revanche, pour l'équation de Schrödinger, la relation de dispersion est

$$\|\boldsymbol{\xi}\|^2 - h\omega = 0.$$

Donc, si $h \neq 0$, il y a des ondes monochromatiques de pulsation

$$\omega = \frac{1}{h} \|\boldsymbol{\xi}\|^2,$$

de vitesse de phase $\mathbf{v}_\varphi = \boldsymbol{\xi}/h$ et de vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = 2\boldsymbol{\xi}/h$. Ce sont donc des ondes dispersives.

Équation des ondes et ses modifications : Quant à l'équation des ondes, on a comme relation de dispersion

$$\omega^2 - c^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = 0,$$

d'où

$$\omega = \pm c \|\boldsymbol{\xi}\| \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_\varphi = \pm c \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} = \mathbf{v}_g.$$

Ainsi, la vitesse de phase coïncide bien avec la vitesse de groupe, mais l'équation des ondes est dispersive au sens affaibli du terme, lorsque la dimension est supérieure ou égale à 2, puisqu'alors \mathbf{v}_φ dépend de $\boldsymbol{\xi}$. Pour l'équation de Klein-Gordon, obtenue en ajoutant un terme d'amortissement ku avec $k > 0$ à l'équation des ondes, on trouve :

$$\omega = \pm \sqrt{k + c^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_\varphi = \pm \frac{\sqrt{k + c^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}, \quad \mathbf{v}_g = \pm c^2 \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{k + c^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2}}.$$

L'équation de Klein-Gordon est donc dispersive dans tous les sens du terme. On pourrait aussi considérer l'équation dite du *télégraphe*, obtenue en ajoutant une autre sorte d'amortissement, en $r \partial_t u$ avec $r > 0$. Dans ce cas, la relation de dispersion devient :

$$\omega^2 + ir\omega - c^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = 0,$$

qui n'admet pas de solution $(\boldsymbol{\xi}, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ non triviale. En fait, on trouve de cette façon des solutions particulières de la forme

$$\underline{u} e^{-\gamma t} e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \beta t)}$$

avec $\beta = \operatorname{Re} \omega$ et $\gamma = -\operatorname{Im} \omega > 0$ (en particulier $\gamma = r$ pour $r < 2c \|\boldsymbol{\xi}\|$) : ce sont des “modes” exponentiellement décroissants en temps. L'existence de tels modes témoigne de la *dissipativité* de l'équation du télégraphe. C'est également le cas pour l'équation de la chaleur, qui admet à l'évidence des solutions particulières de la forme :

$$\underline{u} e^{-\kappa \|\boldsymbol{\xi}\|^2 t} e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})}.$$

La recherche d'ondes planes progressives monochromatiques pour les autres exemples du tableau est laissée en exercice.

É.D.P. dissipatives / É.D.P. conservatives

On dit d'une É.D.P. d'évolution qu'elle est *dissipative* s'il existe une fonctionnelle strictement convexe et strictement décroissante le long des solutions non triviales (c'est-à-dire dépendant effectivement du temps). On dit qu'elle est *conservative* s'il existe une fonctionnelle convexe *constante* le long des solutions. La fonctionnelle en question est souvent liée à une énergie physique, c'est pourquoi on parle d'*estimation d'énergie* lorsqu'on évalue ses variations. Il n'est pas impossible que les deux aspects, dissipation et conservation, soient présents, pour deux fonctionnelles distinctes.

Exemples. Pour l'équation de la chaleur, si $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ est une solution non triviale alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} u(x, t)^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} u \partial_t u d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} u \Delta u d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla u\|^2 d\mathbf{x} < 0$$

après intégration par parties. On peut justifier cette intégration par parties car u est en fait de classe \mathcal{C}^∞ en \mathbf{x} : c'est l'*effet régularisant* de l'équation de la chaleur, qui se montre grâce à la transformation de Fourier (voir le chapitre 2). L'équation de la chaleur est donc bien dissipative au sens de la définition ci-dessus. Quant à l'équation de Schrödinger, elle est conservative. En effet, si $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ est une solution non triviale alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |u(x, t)|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (u \partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_t u) d\mathbf{x} = i \frac{\hbar}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (-u \Delta \bar{u} + \bar{u} \Delta u) d\mathbf{x} = i \frac{\hbar}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d (\partial_j u \partial_j \bar{u} - \partial_j \bar{u} \partial_j u) d\mathbf{x} = 0$$

après intégration par parties. En fait, pour justifier ici l'intégration par parties, il faut supposer au départ $u \in \mathcal{C}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^d))$, où $H^1(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable ainsi que leur dérivée première (voir encore le chapitre 2 pour une définition précise de $H^1(\mathbb{R}^d)$). En effet, l'équation de Schrödinger n'a pas du tout l'effet régularisant de l'équation de la chaleur !

Exercice. Vérifier que les autres équations de la colonne hyperbolique et de la colonne dispersive sont conservatives, si l'on suppose tous les coefficients constants.

Souvent, les équations conservatives admettent une *structure hamiltonienne*, c'est-à-dire une écriture équivalente de la forme

$$\partial_t u = \mathcal{J} \delta \mathcal{H}[u],$$

où

$$\mathcal{H} = \int H[u] \, dx$$

est la fonctionnelle conservée, ou *Hamiltonien*, $\delta \mathcal{H}[u]$ est son *gradient variationnel*, défini par :

$$\int \delta \mathcal{H}[u] \cdot \dot{u} \, dx = \frac{d}{d\theta} \mathcal{H}[u + \theta \dot{u}]|_{\theta=0},$$

et \mathcal{J} est un opérateur (différentiel) antisymétrique pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Réciproquement, pour un système d'É.D.P. admettant une telle structure, la fonctionnelle \mathcal{H} est conservée le long des solutions. En effet, si u est une solution (dans un espace fonctionnel adéquat) :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}[u(t)] = \int_{\mathbb{R}^d} \delta \mathcal{H}[u(t)] \cdot \partial_t u \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \delta \mathcal{H}[u(t)] \cdot \mathcal{J} \delta \mathcal{H}[u(t)] \, dx = 0$$

d'après l'antisymétrie de \mathcal{J} (qui est donc aussi alternée).

Exemple. Pour l'équation de Schrödinger, le Hamiltonien est

$$\mathcal{H}[u] = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |u(x, t)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} (v^2 + w^2) \, dx$$

avec $v = \operatorname{Re} u$ et $w = \operatorname{Im} u$, d'où

$$\delta \mathcal{H}[u] = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

qui s'identifie à u . Comme la multiplication par i a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$i \hbar \partial_t u = \Delta u \iff \partial_t u = \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \delta \mathcal{H}[u].$$

Exercice. Vérifier que l'opérateur différentiel matriciel

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

est antisymétrique.

2 Analyse de Fourier

Un outil essentiel pour l'étude des É.D.P. (linéaires) est la transformation de Fourier. Il existe différentes conventions pour sa définition. Concernant le développement de la théorie, il est plus commode de définir (formellement) la transformée d'une fonction u de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ par

$$\widehat{u}(\boldsymbol{\zeta}) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}) e^{-2i\pi \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d.$$

Par abus de langage, la variable $\boldsymbol{\zeta}$ est appelée *fréquence*¹. Dans les applications, il est souvent plus agréable de travailler avec

$$\widetilde{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Le passage de l'une à l'autre est évident, c'est un simple changement d'échelles en "fréquences" :

$$\widehat{u}(\boldsymbol{\zeta}) = \widetilde{u}(2\pi \boldsymbol{\xi}).$$

On se place pour commencer en dimension $d = 1$.

La transformation de Fourier est aux fonctions suffisamment "décroissantes" à l'infini ce que les séries de Fourier sont aux fonctions périodiques, ces deux approches ayant des liens que l'on va mettre en évidence.

2.1 Séries de Fourier

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions mesurables sur \mathbb{R} , 1-périodiques (au sens où $f(x+1) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$) et de puissance p -ième intégrable sur $[0, 1]$, que l'on munit de la norme naturelle

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

(Bien sûr la notation \mathbb{T} signifie le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} .) On remarque en particulier l'inclusion $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ pour tout $p \geq 1$ (conséquence de l'inégalité de Hölder, sur l'intervalle *borné* $[0, 1]$).

¹ce qui correspond au vocabulaire physique lorsque \mathbf{x} est en fait homogène à un temps!

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit ses *coefficients de Fourier* par

$$c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi n x} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

et on considère sa *série de Fourier*

$$\sum_n c_n e^{2i\pi n x}.$$

On notera $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi n x}$ les sommes partielles de cette série. Comme $(e^{2i\pi n x})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$, on a les propriétés fondamentales suivantes :

- **(Inégalité de Bessel)** pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

- si g est un *polynôme trigonométrique*, c'est-à-dire une somme finie d'éléments de la famille, il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, $S_N(g) = g$.

Théorème 1 Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

Dém. Soient $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $\varepsilon > 0$. Par densité des fonctions continues dans $L^2(\mathbb{T})$ (conséquence du théorème de Lusin, voir par exemple Rudin [3], p. 66), il existe f_0 continue et 1-périodique telle que

$$\|f - f_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \varepsilon/4.$$

Cette application continue 1-périodique f_0 induit une application continue F_0 sur le cercle unité C telle que

$$f_0(x) = F_0(e^{2i\pi x}).$$

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, l'application F_0 est limite uniforme de fonctions polynômiales sur le compact C . On en déduit que f_0 est limite uniforme de polynômes trigonométriques sur l'intervalle $[0, 1]$. En particulier, il existe un polynôme trigonométrique g tel que

$$\sup_{[0,1]} \|f_0 - g\| \leq \varepsilon/4.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\|S_N(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|S_N(f) - S_N(g)\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|S_N(g) - g\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|f - g\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 2\|f - g\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|S_N(g) - g\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

d'après l'inégalité de Bessel. Or, pour N assez grand, $S_N(g) - g = g$. On en déduit à nouveau grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\|S_N(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 2\|f - f_0\|_{L^2(\mathbb{T})} + 2\|f_0 - g\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \varepsilon.$$

□

Une conséquence immédiate du théorème 1 est

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

d'où l'identité de Parseval :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

en utilisant à nouveau l'orthonormalité de la famille $(e^{2i\pi nx})_{n \in \mathbb{Z}}$. Inversement, toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est la suite des coefficients de Fourier d'une application $f \in L^2(\mathbb{T})$: les sommes partielles $\sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi nx}$ forment en effet une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{T})$ qui est complet, donc convergent vers une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, et

$$\langle f, e^{2i\pi mx} \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi nx}, e^{2i\pi mx} \right\rangle = c_m.$$

Il existe divers autres résultats de convergence, plus fins que le théorème 1 :

Théorème 2 Si la série $\sum_n c_n$ des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ est absolument convergente, alors sa série de Fourier est uniformément convergente et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} |S_N(f) - f| = 0.$$

Théorème 3 (Dirichlet) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est dérivable à gauche et à droite en tout point, alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$$

quel que soit x .

Théorème 4 (Féjer) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est continue à gauche et à droite en tout point, alors $S_N(f)(x)$ converge en moyenne de Césaro vers $\frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$ quel que soit x .

2.2 Transformation de Fourier des fonctions intégrables

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ la transformée de Fourier de f par

$$\widehat{f}(\zeta) = \int f(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx.$$

Une application immédiate du théorème de Lebesgue montre que c'est une application continue. De plus, elle est bornée par $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.
Voici tout d'abord une formule remarquable, qui fait le lien avec les séries de Fourier.

Théorème 5 (Formule sommatoire de Poisson) *Si f est intégrable, continue et telle que la série $\sum_n f(x+n)$ converge normalement sur $L^\infty([a, b])$ quels que soient a et b finis et si la série $\sum_n \widehat{f}(n)$ est absolument convergente, alors*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x}.$$

En particulier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$.

Dém. D'après les hypothèses, la fonction

$$x \mapsto F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$$

est définie et continue en tout point x de \mathbb{R} , et elle est évidemment 1-périodique. Ses coefficients de Fourier sont

$$C_m = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi m x} dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi m(x+n)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi m(x+n)} dx,$$

c'est-à-dire par changement de variable,

$$C_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2i\pi m y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi m y} dy = \widehat{f}(m).$$

L'hypothèse sur la série $\sum_n \widehat{f}(n)$ assure que F est somme de sa série de Fourier (par le théorème 2), d'où le résultat. □

La formule de Poisson permet, entre autres, de donner une démonstration rapide du théorème fondamental suivant.

Théorème 6 Si f est intégrable et continue, si les séries $\sum_n f(x+n)$ et $\sum_n \widehat{f}(\zeta+n)$ convergent normalement sur $L^\infty([a, b])$ quels que soient a et b finis, alors

- (formule d'inversion)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) e^{2i\pi\zeta x} d\zeta$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (formule de Plancherel)

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Dém. On commence par remarquer la formule élémentaire :

$$\mathcal{F}\left(f e^{-2i\pi\tau\cdot}\right) = \widehat{f}(\cdot + \tau).$$

En appliquant la formule sommatoire de Poisson à la fonction $x \mapsto f(x) e^{-2i\pi\tau x}$, on en déduit donc :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi\tau(x+n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi n x},$$

ou encore

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi\tau n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi(n+\tau)x}.$$

Le membre de gauche est une série de Fourier par rapport à la variable τ , dont les coefficients $c_n = (f(x-n))_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une série absolument convergente (à x fixé). En particulier, le coefficient $c_0 = f(x)$ est donné par :

$$c_0 = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi\tau n} d\tau = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi(n+\tau)x} d\tau = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \widehat{f}(\zeta) e^{2i\pi(\zeta)x} d\zeta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) e^{2i\pi\zeta x} d\zeta.$$

Ceci montre la formule d'inversion. D'autre part, d'après l'identité de Parseval, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi(n+\tau)x} \right|^2 d\tau = \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi n x} \right|^2 d\tau,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)|^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi n x} \right|^2 d\tau dx.$$

Grâce au théorème de Fubini, on peut intervertir l'ordre d'intégration, et comme

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi n x} \right|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+\tau)|^2$$

par la formule de Parseval, on obtient finalement

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+\tau)|^2 d\tau = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\zeta)|^2 d\zeta.$$

□

Remarque 1

- *Les théorèmes 5 et 6 ne sont pas vides : il existe des fonctions f satisfaisant leurs hypothèses. En effet, si f est une fonction dérivable et intégrable, de dérivée f' aussi intégrable², alors on a*

$$\widehat{f}(\zeta) = \int f(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx = \frac{1}{2i\pi\zeta} \int f'(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx = \frac{1}{2i\pi\zeta} \widehat{f}'(\zeta).$$

Par suite, si f est deux fois dérivable, avec f , f' et f'' intégrables, on a

$$\widehat{f}(\zeta) = -\frac{1}{4\pi^2\zeta^2} \widehat{f}''(\zeta),$$

d'où

$$|\widehat{f}(\zeta+n)| \leq \frac{1}{4\pi^2(\zeta+n)^2} \|\widehat{f}''\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

La série $\sum_n \widehat{f}(\zeta+n)$ est donc normalement convergente sur $L^\infty([a,b])$ quels que soient a et b finis. Pour que la série $\sum_n f(x+n)$ le soit aussi, il suffit de prendre f à support compact³. Une fonction de classe \mathcal{C}^2 à support compact remplit donc les hypothèses des théorèmes 5 et 6.

²noter qu'une telle fonction f tend nécessairement vers 0 en $\pm\infty$.

³Rappelons que le support d'une application continue est l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas.

- Attention, il n'y pas d'ordre entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ (contrairement à ce qui se passe sur le tore \mathbb{T}). Cependant, on montre que les fonctions satisfaisant les hypothèses du théorème 6 sont nécessairement de carré intégrable. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-N}^{N+1} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-N}^N \int_0^1 |f(x+n)|^2 dx \leq \sum_{n=-N}^N \max_{[0,1]} |f(\cdot + n)|^2.$$

Donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$ est finie dès que la suite $\max_{[0,1]} f(\cdot + n)$ appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$. Et il y a bel et bien ordre entre les espace de suites $\ell^p(\mathbb{Z})$:

$$\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \subset \dots \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

Par suite, l'égalité de Plancherel dans le cadre du théorème 6 a lieu entre quantités finies !

2.3 Transformation de Fourier sur L^2

On va "étendre \mathcal{F} par densité", en s'appuyant sur le

Théorème 7 Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Dém. (constructive)

Il existe des fonctions de classe C^∞ à support compact (laissé en exercice). Soit ρ l'une d'entre elles, à valeurs positives ou nulles, à support dans $[-1, 1]$ et d'intégrale 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Cette nouvelle fonction est bien sûr encore à valeurs positives ou nulles, elle est à support dans $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ et d'intégrale 1.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\left(\int_{|x|>1/\varepsilon_0} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et f_ε définie par

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} f(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy,$$

c'est-à-dire

$$f_\varepsilon = (\mathbf{1}_{[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]} f) * \rho_\varepsilon.$$

Rappelons que la *convolution* de deux fonctions g et h , intégrables sur \mathbb{R} est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$(g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) h(x - y) dy.$$

Plus généralement, on peut étendre la définition à $g \in L^p(\mathbb{R})$ et $h \in L^1(\mathbb{R})$, les fonctions $y \mapsto g(y) h(x - y)$ étant intégrables pour presque tout x , et on a l'inégalité :

$$\|g * h\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

(La démonstration est une application astucieuse de l'inégalité de Hölder, cf Brézis [1] p. 67.)

Revenons donc à la fonction f_ε . Elle est clairement à support compact (inclus dans $[-1/\varepsilon - \varepsilon, 1/\varepsilon + \varepsilon]$), de classe C^∞ comme ρ_ε . Et on a pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|(\mathbf{1}_{\{|x|>1/\varepsilon_0\}}) f * \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

D'après le rappel sur la convolution, le premier morceau est inférieur ou égal à

$$\|(\mathbf{1}_{\{|x|>1/\varepsilon_0\}}) f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|\rho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left(\int_{|x|>1/\varepsilon_0} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{\alpha}{2}$$

par hypothèse sur ε_0 . Quant au second morceau, il tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 : c'est une propriété fondamentale de la convolution par une suite de fonctions du type de ρ_ε , aussi appelée *noyau de régularisation*, que l'on montre à part dans le lemme 1. Donc il est inférieur à $\alpha/2$ pour ε assez petit. \square

Lemme 1 Soit ρ une fonction de classe C^∞ à support compact, à valeurs positives ou nulles, à support dans $[-1, 1]$ et d'intégrale 1. Soit

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Dém. Pour presque tout x , on a, par définition de $f * \rho_\varepsilon$ et puisque ρ_ε est d'intégrale 1,

$$(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \rho_\varepsilon(x - y) dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(y) - f(x)) \rho_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}} (f(x - \varepsilon z) - f(x)) \rho(z) dz.$$

Ici on est coincé en général. En revanche, si f est continue à support compact, on peut conclure de façon élémentaire : comme $f(x - \varepsilon z) - f(x)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et

$$|(f(x - \varepsilon z) - f(x)) \rho(z)| \leq 2 |\rho(z)| \max_{[x-1, x+1]} |f|,$$

on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue; on en déduit que $(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, uniformément sur tout compact. Comme en fait $(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x)$ est à support dans un compact fixe $\text{supp } f + [-1, 1]$, cela suffit pour avoir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Pour une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ quelconque, on fait appel au résultat d'approximation suivant, que l'on admettra : *l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$* (conséquence du théorème de Lusin). Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. Il existe g continue à support compact telle que

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Alors

$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|(f - g) * \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g * \rho_\varepsilon - g\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|g - f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g * \rho_\varepsilon - g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Le premier morceau est inférieur à $2\alpha/3$, et le second est rendu inférieur à $\alpha/3$ pour ε assez petit (d'après le résultat sur les fonctions continues à support compact). \square

Grâce aux théorèmes 7 et 6, la transformation de Fourier \mathcal{F} s'étend continûment en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. En effet, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une "suite" f_ε de fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque ε tend vers 0. La "suite" $(\mathcal{F}(f_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$, puisque

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon) - \mathcal{F}(f_{\varepsilon'})\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

donc elle converge vers une fonction $F \in L^2(\mathbb{R})$. Cette limite ne dépend pas de la suite. Car si g_ε en est une autre, de limite G , on a

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon) - \mathcal{F}(g_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

d'où en passant à la limite

$$\|F - G\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Cette limite est par définition la transformée de Fourier de f , notée \widehat{f} . De plus, en passant à la limite dans l'identité :

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

on obtient

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Quant à la formule d'inversion, d'après la remarque 1, elle est satisfaite au moins sur le sous-ensemble dense constitué des fonctions de classe \mathcal{C}^2 à support compact. On peut écrire en abrégé la formule d'inversion :

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \text{Id}.$$

Cette identité est vraie sur L^2 tout entier par passage à la limite. En revanche, la formule d'inversion telle qu'elle est écrite dans le théorème 6 suppose \widehat{f} intégrable, *ce qui n'est pas automatique*.

2.3.a Transformation de Fourier en dimension quelconque

En suivant une démarche analogue, on peut définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ quel que soit l'entier d . C'est une application que l'on note encore \mathcal{F} :

- linéaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$,
- qui préserve la norme,
- telle que

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \text{Id},$$

- et si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ est définie par

$$\widehat{f}(\zeta) = \int f(\mathbf{x}) e^{-2i\pi\zeta \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

$f(\mathbf{x})$	$\partial^\alpha f(\mathbf{x})$	$(f * g)(\mathbf{x})$	$f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$	$f(a \mathbf{x})$	$f(\mathbf{x}) \cos(2\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\zeta}_0)$
$\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})$	$(2i\pi)^{ \alpha } \boldsymbol{\zeta}^\alpha \widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})$	$\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta}) \widehat{g}(\boldsymbol{\zeta})$	$e^{2i\pi \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{a}} \widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})$	$\frac{1}{ a ^d} \widehat{f}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{a}\right)$	$\frac{1}{2}(\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_0) + \widehat{f}(\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}_0))$

Tableau 2: Formulaire de base (on obtient des formules analogues en échangeant les rôles de f et \widehat{f})

Notations. Pour tout d -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ on convient de noter $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ la “longueur” de α , et

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad \boldsymbol{\zeta}^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_d^{\alpha_d}$$

pour tout $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{R}^d$.

Remarque 2 Si f est une fonction de classe C^∞ à support compact, sa transformée de Fourier \widehat{f} se prolonge en une fonction analytique sur \mathbb{C}^d . En effet, si $K = \text{supp}(f)$,

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta}) = \int_K f(\mathbf{x}) e^{-2i\pi \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

est défini quel que soit $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{C}^d$ et hérite de l’analyticité de la fonction exponentielle. De plus, en notant $|\boldsymbol{\zeta}| = \sqrt{\sum_{j=1}^d |\zeta_j|^2}$, $\boldsymbol{\eta} = \text{Im } \boldsymbol{\zeta}$ et

$$I_K(\boldsymbol{\eta}) = \max_{\mathbf{x} \in K} (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}),$$

on montre par intégrations par parties successives, l’inégalité

$$|\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})| \leq \frac{1}{(2\pi |\boldsymbol{\zeta}|)^{|\alpha|}} \|\partial^\alpha f\|_{L^1(K)} e^{2\pi I_K(\boldsymbol{\eta})},$$

pour tout d -uplet α . Par suite, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$|\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})| \leq \frac{C_p}{(1 + |\boldsymbol{\zeta}|)^p} e^{2\pi I_K(\boldsymbol{\eta})}$$

quel que soit $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{C}^d$. (Noter qu’en particulier si K est la boule de centre 0 et de rayon R , $I_K(\boldsymbol{\eta}) = R \|\boldsymbol{\eta}\|$.) Cette propriété caractérise en fait la transformée de Fourier des fonctions de classe C^∞ à support inclus dans K (théorème de Paley-Wiener).

2.3.b Espaces de Sobolev construits sur L^2

Pour tout $s > 0$, on définit

$$\lambda^s(\zeta) = (1 + \|\zeta\|^2)^{s/2},$$

et l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^d); \lambda^s \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d) \}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|\lambda^s \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

C'est un espace de Hilbert. D'après la formule déjà rencontrée

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\zeta) = (2i\pi)^{|\alpha|} \zeta^\alpha \widehat{f}(\zeta),$$

on voit que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $H^p(\mathbb{R}^d)$ contient les fonctions p fois dérivables dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre p sont de carré intégrable. En fait, $H^p(\mathbb{R}^d)$ est exactement l'ensemble des *distributions tempérées* (voir le paragraphe 2.4) dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre p sont des fonctions appartenant à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Et la norme sur $H^p(\mathbb{R}^d)$ est équivalente à la norme $\widetilde{\|\cdot\|}$ définie par

$$\widetilde{\|u\|}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sum_{|\alpha| \leq p-1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

2.3.c Transformées de Fourier classiques

- En dimension 1, on calcule facilement la transformée de Fourier de la fonction créneau :

$$f = \mathbf{1}_{|x| \leq R} \implies \widehat{f}(\zeta) = \frac{\sin(2\pi R \zeta)}{\pi \zeta}.$$

Ces deux fonctions étant de carré intégrable, on a inversement :

$$f(x) = \frac{\sin(2\pi R x)}{\pi x} \implies \widehat{f}(\zeta) = \mathbf{1}_{|\zeta| \leq R}.$$

- Pour $a > 0$, la fonction $f, : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a|x|}$ a pour transformée de Fourier

$$\widehat{f}(\zeta) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \zeta^2}.$$

• Pour une Gaussienne :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\sigma^2\pi)^d}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|^2}{2\sigma^2}},$$

la transformée de Fourier est de même nature :

$$\widehat{f}(\zeta) = e^{-2i\pi\zeta\cdot\mathbf{m}} e^{-2\pi^2\sigma^2\|\zeta\|^2}.$$

En particulier, on voit que la fonction

$$f(\mathbf{x}) = e^{-\pi\|\mathbf{x}\|^2}$$

est invariante par transformation de Fourier. On remarque tout d'abord qu'il suffit de faire le calcul pour $d = 1$. En effet, il est évident que f est intégrable. Sa transformée de Fourier est donc définie par

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\|x-\mathbf{m}\|^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta\cdot\mathbf{x}} dx,$$

et le théorème de Fubini montre que :

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta_1 x_1} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_d-m_d)^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta_d x_d} dx_d.$$

Pour calculer

$$g_m(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta x} dx = e^{-2i\pi\zeta m} g_0(\zeta),$$

il y a plusieurs méthodes. On peut faire appel à la théorie des fonctions de variable complexe (formule de Cauchy). Un calcul plus élémentaire consiste à remarquer :

$$g_0'(\zeta) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta x} dx = -4\pi^2\sigma^2\zeta \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta x} dx = -4\pi^2\sigma^2\zeta g_0(\zeta)$$

par intégration par parties. D'où, en résolvant à vue l'équation différentielle satisfaite par g_0 :

$$g_0(\zeta) = g_0(0) e^{-2\pi^2\sigma^2\zeta^2}.$$

Il reste à calculer, et c'est vrai quelle que soit l'approche choisie, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = g_0(0).$$

Par un changement de variable évident on a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy.$$

Enfin, il y a une astuce bien connue pour calculer

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy.$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x} = I^2$$

(par le théorème de Fubini) et on calcule l'intégrale sur \mathbb{R}^2 en passant en coordonnées polaires :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x} = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \pi.$$

D'où finalement

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \sqrt{2\pi}.$$

• On peut utiliser le résultat précédent pour calculer la transformée de Fourier *au sens des distributions* (voir le paragraphe 2.4 ci-après) de la fonction continue bornée :

$$f(\mathbf{x}) = e^{is\|\mathbf{x}\|^2}$$

pour $s \neq 0$. On trouve

$$f(\zeta) = \left(\frac{\pi}{|s|}\right)^{d/2} e^{\pm id\pi/4} e^{i\pi^2 \|\zeta\|^2/s},$$

où le signe \pm est celui de s .

2.4 Transformation de Fourier sur \mathcal{S}'

Le comportement de la transformation de Fourier vis à vis de la dérivation et inversement, vis à vis de la multiplication par un polynôme, implique une sorte de dualité entre la régularité et la décroissance à l'infini : plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini; plus une fonction décroît rapidement à l'infini, plus sa transformée de Fourier est régulière. Il existe une classe de

fonctions qui allie les deux propriétés, c'est la *classe de Schwartz* des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées (on dit souvent en abrégé *fonctions à décroissance rapide*), qui est par conséquent invariante par transformation de Fourier. La définition précise est

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \text{ pour tout multi-indice } \alpha, \text{ pour tout entier } \beta, \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + \|\mathbf{x}\|)^\beta |\partial^\alpha f(\mathbf{x})| < +\infty \right\}.$$

L'exemple classique de fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est la gaussienne :

$$f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est donc un espace vectoriel non trivial, que l'on munit de la topologie associée aux semi-normes :

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + \|\mathbf{x}\|)^\beta |\partial^\alpha f(\mathbf{x})|.$$

Cela signifie en particulier qu'une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge vers f si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\alpha, \beta} = 0 \quad \text{pour tout multi-indice } \alpha \text{ et pour tout entier } \beta.$$

On peut ensuite définir le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, espace des formes linéaires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, continues au sens séquentiel suivant:

$$\langle u, f_n \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \rightarrow \langle u, f \rangle \quad \text{pour toute suite } f_n \in \mathcal{S} \text{ convergeant vers } f.$$

Les éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont appelés *distributions tempérées*. La topologie sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est telle que:

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{S}' \text{ (ce que l'on note aussi } u_n \rightharpoonup u) \quad \text{si et seulement si } \langle u_n, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \rightarrow \langle u, f \rangle \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}.$$

En particulier, toute fonction mesurable g à croissance au plus polynomiale peut être vue comme une distribution tempérée : il suffit pour cela de l'identifier avec la forme linéaire continue

$$f \mapsto \langle g, f \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

L'exemple classique de distribution tempérée est la *masse de Dirac* $\delta_{\mathbf{x}}$, définie par :

$$\langle \delta_{\mathbf{x}}, f \rangle = f(\mathbf{x}).$$

Ce n'est pas une fonction, contrairement à un abus de langage courant. On peut la voir comme une mesure de Radon (puisque c'est aussi une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions continues bornées). Il est intéressant de remarquer que $\delta_{\mathbf{x}}$ s'obtient par passage à la limite sur les noyaux déjà rencontrés.

Proposition 1 Soit ρ une fonction de classe C^∞ à support compact, à valeurs positives ou nulles, à support dans $[-1, 1]$ et d'intégrale 1. Soit

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{y}) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Alors ρ_ε converge vers $\delta_{\mathbf{x}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dém. L'énoncé signifie que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \rho_\varepsilon, f \rangle = f(\mathbf{x}).$$

Le calcul à faire pour prouver cette assertion est le même que pour le lemme 1 (sauf qu'ici on est en dimension d , ce qui donne un ε^d dans le jacobien du changement de variables). \square

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ étant invariant par transformation de Fourier, il est très facile d'étendre cette transformation à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, notons que pour deux fonctions g et f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle g, \widehat{f} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(\zeta) \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) e^{-2i\pi \mathbf{y} \cdot \zeta} d\mathbf{y} d\zeta = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) e^{-2i\pi \mathbf{x} \cdot \xi} d\mathbf{x} d\xi = \langle \widehat{g}, f \rangle$$

(où l'on a simplement utilisé le théorème de Fubini). Il est donc naturel de définir

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \\ T &\mapsto \widehat{T}; \langle \widehat{T}, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Exemple. La transformée de Fourier au sens des distributions de

$$\mathbf{x} \mapsto e^{is\|\mathbf{x}\|^2}$$

pour $s > 0$ s'identifie avec la fonction

$$\zeta \mapsto \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2} e^{id\pi/4} e^{-i\pi^2 \|\zeta\|^2/s}.$$

En effet, on sait que la Gaussienne $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = e^{-a\|\mathbf{x}\|^2}$, qui est une fonction de \mathcal{S} pour $a > 0$, admet pour transformée de Fourier

$$\zeta \mapsto \widehat{\varphi}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-\pi^2 \|\zeta\|^2/a}.$$

Par suite, on a pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-a\|\mathbf{x}\|^2} \widehat{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi^2 \|\zeta\|^2/a} f(\zeta) \, d\zeta.$$

Considérons alors les fonctions de la variable complexe z définies par

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z\|\mathbf{x}\|^2} \widehat{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad G(z) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi^2 \|\zeta\|^2/z} f(\zeta) \, d\zeta,$$

où $z^{1/2}$ désigne la racine carrée de z de partie réelle positive pour $\operatorname{Re} z > 0$. D'après la formule ci-dessus, ces deux fonctions coïncident pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$. De plus, elles sont analytiques dans le demi-plan ouvert $\{z; \operatorname{Re} z > 0\}$. Donc elles coïncident en fait sur tout le demi-plan. Enfin, elles admettent toutes deux un prolongement par continuité à $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour G , on remarque que pour $s > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + is)^{1/2} = \sqrt{s} e^{i\pi/4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - is)^{1/2} = \sqrt{s} e^{-i\pi/4}.$$

D'où à la limite,

$$F(-is) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{is\|\mathbf{x}\|^2} \widehat{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = G(-is) = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2} e^{id\pi/4} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\pi^2 \|\zeta\|^2/s} f(\zeta) \, d\zeta$$

pour $s > 0$. Ceci étant vrai quelle que soit la fonction f , on en déduit le résultat annoncé.

La dérivation au sens des distributions se définit aussi par extension des formules vraies pour les fonctions :

$$\langle \partial^\alpha T, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha f \rangle \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

quel que soit le multi-indice α . Ceci permet de montrer facilement la formule:

$$\widehat{\partial^\alpha T} = (2i\pi)^{|\alpha|} \zeta^\alpha \widehat{T},$$

et ainsi de donner un sens à l'assertion faite plus haut concernant les espaces de Sobolev d'indice entier $p \in \mathbb{N}^*$. On a en effet

$$H^p(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ pour tout multi-indice } \alpha \text{ de longueur } |\alpha| \leq p\},$$

où les dérivées sont prises au sens des distributions.

2.5 Transformation de Fourier discrète

Pour simplifier, on se place ici en dimension $d = 1$.

2.5.a Cas d'un réseau infini

Lorsqu'on s'intéresse à l'approximation numérique d'É.D.P. on peut être amené (par exemple pour étudier la stabilité d'un schéma numérique) à faire une "transformation de Fourier" sur des suites au lieu de fonctions : typiquement, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est supposée approcher les valeurs de la solution d'une É.D.P. en des points répartis sur une grille, ou *maillage* $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Lorsque les points x_n sont équidistants au sens où $x_{n+1} - x_n = \Delta x$ indépendamment de n , on dit que le maillage est *structuré*. Plaçons nous dans ce cadre. Pour simplifier la présentation, on peut faire un changement d'échelle et supposer $\Delta x = 1$ (ainsi que $x_n = n$).

La transformée de Fourier discrète d'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se définit alors de façon assez naturelle comme l'unique fonction $\mathcal{F}_d(u) = \tilde{u} \in L^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier sont les u_n (voir le paragraphe 2.1). Plus exactement, définissons \tilde{u} comme la limite dans $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ des sommes partielles de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{-2i\pi n\omega}.$$

Bien sûr, d'après la formule de Parseval, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 = \int_0^1 |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega,$$

ce qui signifie que la transformation de Fourier discrète :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto \tilde{u} \end{aligned}$$

est une isométrie. Il se trouve que l'on peut aussi voir la restriction de \tilde{u} à l'intervalle (de longueur 1) $] - 1/2, 1/2[$ comme la transformée de Fourier (standard, "non discrète") d'une certaine fonction u^* interpolant la suite (u_n) . Considérons en effet les fonctions ψ_n définies par

$$\psi_n(x) = \frac{\sin(\pi(x - n))}{\pi(x - n)}.$$

D'après le paragraphe 2.3.c, on sait que

$$\widehat{\psi}_n(\zeta) = \mathbf{1}_{|\zeta| \leq 1/2} e^{-2i\pi n\zeta}.$$

En particulier, d'après la formule de Plancherel,

$$\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \quad \text{et} \quad \langle \psi_n, \psi_k \rangle = 0 \quad \text{pour } n \neq k,$$

c'est-à-dire que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée. D'autre part, les fonctions ψ_n admettent des prolongements par continuité aux points $x = n$, et on a de façon évidente,

$$\psi_n(k) = \delta_n^k \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

Définissons alors

$$\mathcal{E}(u) = u^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \psi_n$$

(au sens hilbertien, c'est-à-dire comme limite des sommes partielles dans $L^2(\mathbb{R})$). On a

$$\forall n, u^*(n) = u_n, \quad \text{et} \quad \|u^*\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Finalement, on a le diagramme commutatif suivant, où $\mathcal{J} : f \mapsto f \mathbf{1}_{|\zeta| \leq 1/2}$.

$$\begin{array}{ccc} (u_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_d} & \tilde{u} \in L^2(\mathbb{T}) \\ \mathcal{E} \downarrow & & \downarrow \mathcal{J} \\ u^* \in L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{u}^* \in L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

2.5.b Cas d'un réseau fini

En pratique, les approximations numériques de la solution d'une É.D.P. ne sont jamais définies sur \mathbb{Z} tout entier, et on dispose seulement d'un nombre fini de valeurs (u_n) . Supposons ces valeurs indexées par $n \in \{0, \dots, N-1\}$. La transformée de Fourier discrète d'une telle suite, prolongée par zéro pour les indices $n \notin \{0, \dots, N-1\}$, est le polynôme trigonométrique :

$$\tilde{u}(\omega) := \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi n\omega}.$$

Or, à partir de N données, il n'y a pas de raison d'obtenir plus de N informations. C'est pourquoi il est assez naturel de ne considérer que N valeurs prises par $\tilde{u}(\omega)$. Pour des raisons de symétrie, on choisit les valeurs $U_0 = \tilde{u}(0)$, $U_1 = \tilde{u}(1/N)$, ..., $U_{N-1} = \tilde{u}((N-1)/N)$. Ceci définit une transformation de Fourier discrète :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N &\longrightarrow \mathbb{C}^N \\ u = (u_n)_{n \in \{0, \dots, N-1\}} &\mapsto U = (U_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}} ; \quad U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi n k/N} . \end{aligned}$$

Comme les autres transformations de Fourier, c'est quasiment une involution. On vérifie en effet facilement que sa réciproque est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N^{-1} : \mathbb{C}^N &\longrightarrow \mathbb{C}^N \\ U = (U_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}} &\mapsto u = (u_n)_{n \in \{0, \dots, N-1\}} ; \quad u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{2i\pi k n/N} . \end{aligned}$$

Transformation de Fourier rapide. Lorsque N est une puissance de 2, il existe un algorithme qui accélère considérablement (lorsque N est grand) le calcul de la transformée de Fourier discrète sur \mathbb{C}^N . L'algorithme de Cooley et Tuckey (1965) permet en effet de faire le calcul avec un nombre d'opérations de l'ordre de $N \log N$ au lieu de N^2 . C'est un joli exercice que de programmer cet algorithme (voir par exemple [2] (leçon n° 9) pour les détails), aussi appelé *FFT* pour *Fast Fourier Transform* en anglais. De nos jours, la FFT est préprogrammée dans les logiciels de calcul scientifique comme Matlab (aussi disponible sous Maple). Attention cependant au décalage : les vecteurs sont numérotés de 1 à N . Ainsi, pour un tableau x de taille $(1, N)$, l'instruction `FFT(x, N)` retourne un tableau X de taille $(1, N)$ dont les composantes sont

$$X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{-2i\pi (n-1)(k-1)/N} .$$

L'instruction inverse `IFFT(X, N)` redonne x , en calculant

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(k) e^{2i\pi (k-1)(n-1)/N} .$$

Approximation de coefficients de Fourier au moyen de la FFT. Si f est une fonction 1-périodique, dont la série de Fourier $\sum_n c_n e^{2i\pi n x}$ est absolument normalement convergente, on peut estimer l'erreur commise lorsqu'on approche les coefficients c_n grâce à la transformée de Fourier discrète de la suite

$$u_k^N := f(k/N), \quad k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

En effet, puisque f est somme de sa série de Fourier (qui converge absolument), on a :

$$u_k^N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n k/N} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{N-1} c_{mN+r} e^{2i\pi r k/N} = \sum_{r=0}^{N-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{mN+r} \right) e^{2i\pi r k/N},$$

ce qui montre que $U^N = \mathcal{F}_N(u^N)$ vérifie

$$U_r^N = N \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{mN+r}, \quad r \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Si on prolonge la suite $(U_r^N)_{r \in \{0, \dots, N-1\}}$ par périodicité à $r \in \mathbb{Z}$ tout entier, en posant

$$U_{r+pN}^N = U_r^N, \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

on voit que la formule précédente reste vraie :

$$U_r^N = N \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{mN+r}, \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, on a pour $r \in \{-N/2, \dots, N/2 - 1\}$:

$$\left| c_r - \frac{1}{N} U_r^N \right| = \left| \sum_{m \neq 0} c_{mN+r} \right| \leq \sum_{|n| \geq N/2} |c_n|.$$

On pourrait bien sûr écrire une estimation moins grossière. En tous cas, la précision de l'approximation de c_r par $\frac{1}{N} U_r^N$ dépend du taux de décroissance de c_n lorsque $n \rightarrow +\infty$, lequel dépend de la régularité de la fonction.

Illustration. Les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction convergent d'autant mieux que la fonction est régulière. Considérons par exemple la fonction continue

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0, 1/2[, \\ 1 - x & \text{pour } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

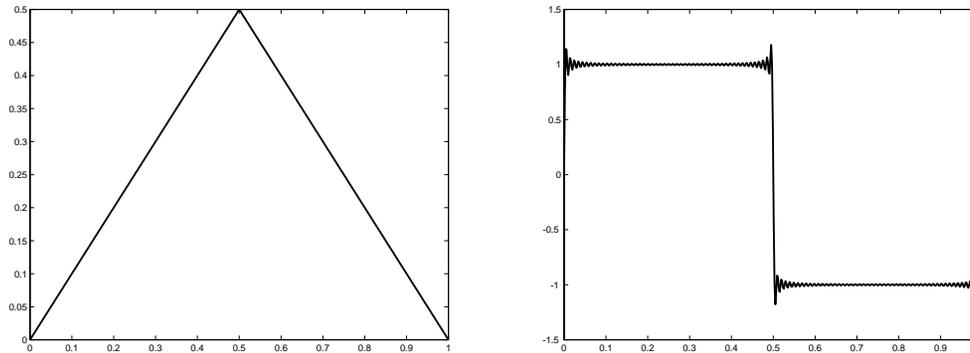


Figure 1: Graphes des sommes partielles de séries de Fourier (tracés avec 500 points).

et la fonction discontinue

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, 1/2[, \\ -1 & \text{pour } x \in [1/2, 1[. \end{cases}$$

La série de Fourier de la première s'écrit

$$\frac{1}{4} + \sum_{n \geq 0} \frac{-\cos(2\pi(2n+1)x)}{\pi^2(2n+1)^2} .$$

Elle est absolument convergente. Quant à la seconde série de Fourier :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{4 \sin(2\pi(2n+1)x)}{\pi(2n+1)} ,$$

elle est seulement semi-convergente.

La figure 1 représente les sommes partielles $\sum_{n=0}^{101}$ de ces séries. On constate que les points de discontinuités sont le siège d'une "mauvaise convergence": c'est un phénomène bien connu. Plus précisément, on a le

Théorème 8 (Phénomène de Gibbs) Soit

$$C := \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx \approx 0.58948987 \dots$$

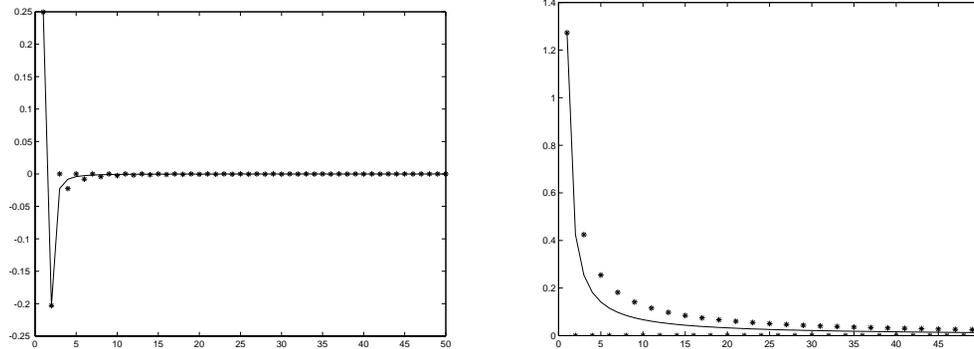


Figure 2: Coefficients de Fourier approchés.

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point, alors pour tout x

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(S_N(f) - f \right) \Big|_{x + \frac{1}{2N+1}} = \left(C - \frac{1}{2} \right) (f(x+0) - f(x-0)),$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(S_N(f) - f \right) \Big|_{x - \frac{1}{2N+1}} = -\left(C - \frac{1}{2} \right) (f(x+0) - f(x-0)).$$

D'autre part, la convergence trop lente vers 0 des coefficients de Fourier des fonctions discontinues nuit au calcul approché de leurs coefficients de Fourier par FFT. La figure 2 représente la comparaison entre les coefficients exacts et les coefficients approchés, calculés pour les deux fonctions précédentes avec une discrétisation de 500 points (même si on a représenté seulement les 50 premiers : attention, il faut se rappeler que l'approximation se détériore lorsqu'on s'approche de l'indice maximal, ici 500). Cependant, les coefficients de Fourier approchés donnent une bonne approximation des sommes partielles, cf figure 3. Pour la fonction continue on ne perçoit pas de différence avec la somme partielle exacte. Pour la fonction discontinue, l'amplitude des oscillations semble moindre avec les coefficients approchés ! Les scripts Matlab ayant fourni ces figures se trouvent en Annexe.

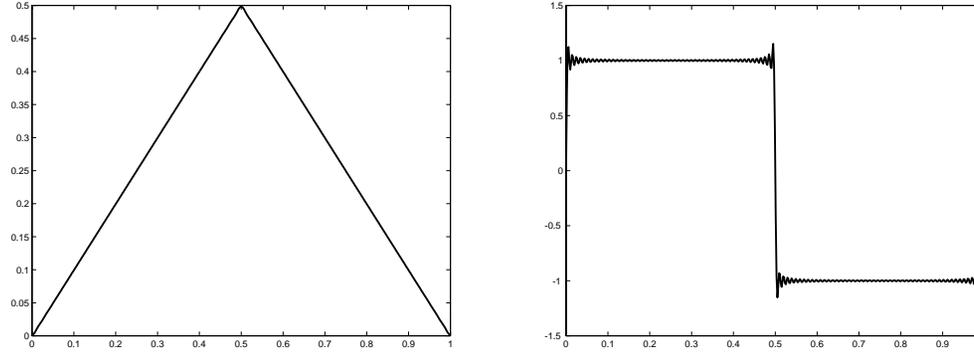


Figure 3: Graphes des sommes partielles de séries de Fourier approchées (tracés avec 500 points).

2.6 Application à quelques É.D.P.

2.6.a Équation de la chaleur

Considérons l'équation

$$\partial_t u = \kappa \Delta u$$

et cherchons des solutions dans \mathcal{S}' . En appliquant la transformation de Fourier en espace, l'opérateur Laplacien est transformé en l'opérateur de multiplication par $-4\pi^2 \|\zeta\|^2$, et on obtient pour chaque valeur de ζ une équation différentielle ordinaire en temps :

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(t, \zeta) = -4\kappa\pi^2 \|\zeta\|^2 \hat{u}(t, \zeta),$$

dont la solution est évidemment :

$$\hat{u}(t, \zeta) = \hat{u}(0, \zeta) e^{-4\kappa\pi^2 t \|\zeta\|^2}.$$

On voit que pour $\kappa < 0$ le comportement de cette solution est "explosif" lorsque $t > 0$. Le problème de Cauchy est mal posé dans le sens usuel du temps ($t > 0$). Heureusement, pour la véritable équation de la chaleur (décrivant la diffusion de la chaleur dans un matériau homogène au repos) le coefficient κ est positif (strictement). Dans ce cas, on voit que $\hat{u}(t, \zeta)$ converge exponentiellement vite vers 0 pour toute valeur non nulle de ζ : ceci traduit la convergence vers un état d'équilibre. En observant que

$$e^{-4\kappa\pi^2 t \|\zeta\|^2} = \mathcal{F}(G_t)(\zeta); \quad G_t(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{4\kappa\pi t}\right)^{d/2} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4\kappa t}},$$

on peut facilement revenir en variables spatiales. On obtient par transformation de Fourier inverse :

$$u(t, \cdot) = u(0, \cdot) * G_t \quad \forall t > 0.$$

Comme G_t est dans \mathcal{S} pour $t > 0$, on peut en effet la convoluer avec n'importe quelle distribution tempérée T en posant

$$(T * G_t)(\mathbf{x}) = \langle T, G_t(\mathbf{x} - \cdot) \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Le résultat $T * G_t$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ (qui définit aussi une distribution tempérée). Si $u(0, \cdot)$ est une fonction bornée ou/et intégrable, on a de plus la formule intégrale :

$$u(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{4 \kappa \pi t} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} u(0, \mathbf{y}) e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4 \kappa t}} d\mathbf{y}.$$

En particulier, on voit que $u(t, \cdot)$ est de classe \mathcal{C}^∞ dès que t est strictement positif : l'équation de la chaleur régularise instantanément toute donnée initiale "raisonnable" (dans un espace L^p ou plus généralement une distribution tempérée).

2.6.b Équation de Schrödinger

Bien que d'apparence semblable à l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger

$$i \partial_t u = h \Delta u$$

a des propriétés tout à fait différentes (physiquement, u représente ce que l'on appelle une fonction d'onde en mécanique quantique, et h est liée à la masse de la particule considérée et à la constante de Planck). Appliquons en effet la transformation de Fourier. Il vient

$$\frac{d}{dt} \widehat{u}(t, \zeta) = 4 i h \pi^2 \|\zeta\|^2 \widehat{u}(t, \zeta),$$

d'où

$$\widehat{u}(t, \zeta) = \widehat{u}(0, \zeta) e^{4 i h \pi^2 t \|\zeta\|^2}.$$

On voit d'emblée sur cette formule, et d'après la formule de Plancherel, que la norme L^2 de la solution est constante au cours du temps (ce que l'on avait déjà observé au moyen d'une "estimation d'énergie"). Supposons pour fixer les idées $h > 0$. Alors, pour $t > 0$, la fonction

$$\zeta \mapsto e^{4 i h \pi^2 t \|\zeta\|^2}$$

est la transformée de Fourier de

$$\mathbf{x} \mapsto G_t(\mathbf{x}) := \left(\frac{1}{4 h \pi t} \right)^{d/2} e^{-i d \pi / 4} e^{-i \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4 h t}}.$$

Mais attention, si cette fonction est bien de classe C^∞ , elle n'est pas dans \mathcal{S} . On ne peut pas la convoluer avec n'importe quelle distribution tempérée (c'est possible avec des distributions à support compact, ou avec des fonctions intégrables). Si par exemple $u(0, \cdot) \in L^1$, alors

$$u(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{4 h \pi t} \right)^{d/2} e^{-i d \pi / 4} \int_{\mathbb{R}^d} u(0, \mathbf{y}) e^{i \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4 h t}} d\mathbf{y}.$$

Du point de vue de la mécanique quantique, le coefficient de module 1 ($e^{-i d \pi / 4}$) n'a pas de signification, ni même d'ailleurs les valeurs ponctuelles de u ! (ce sont ce que l'on appelle les observables, de la forme $\int_{\mathbb{R}^d} u^* A \cdot u dx$, A étant un opérateur différentiel Hermitien, qui comptent).

2.6.c Équations hyperboliques

- L'équation hyperbolique la plus simple est indéniablement l'équation de transport :

$$\partial_t u + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0.$$

On peut faire appel à la transformation de Fourier pour la résoudre, puisque l'équation transformée :

$$\partial_t \hat{u} + 2 i \pi (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \hat{u} = 0$$

se résout à vue en

$$\hat{u}(t, \boldsymbol{\zeta}) = \hat{u}(0, \boldsymbol{\zeta}) e^{-2 i \pi (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\zeta}) t} \implies u(t, \mathbf{x}) = u(0, \mathbf{x} - \mathbf{a} t).$$

Cette façon de procéder est efficace et assez rapide, mais tout de même un peu luxueuse. En effet, cela ne demande pas beaucoup d'intuition pour voir que, si u est solution de l'équation de transport de vitesse \mathbf{a} ,

$$\frac{d}{dt} \left(u(t, \mathbf{y} + \mathbf{a} t) \right) = 0!$$

Les courbes d'équation paramétrique

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{a} t$$

sont appelées *courbes caractéristiques*, et l'information se propage exactement selon ces courbes.

- Si on passe à une équation un peu plus compliquée, l'équation des ondes, la transformation de Fourier n'est pas forcément la méthode la plus facile pour la résoudre (en particulier, il n'est pas évident d'obtenir des formules explicites si on les connaît pas à l'avance). On verra au chapitre 3 une méthode à la fois plus élémentaire et plus astucieuse.

- Cependant, la transformation de Fourier est utile pour étudier les propriétés qualitatives des É.D.P., et en particulier des équations hyperboliques plus compliquées que l'équation des ondes (dans lesquelles se cachent des équations d'onde). Voyons par exemple l'équation de l'élasticité :

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

L'inconnue $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ représente le déplacement d'un matériau donné par rapport à un état de référence, et les coefficients λ, μ sont des caractéristiques du matériau (coefficients de Lamé ou modules d'Young). Effectuons une transformation de Fourier en espace. On obtient l'équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\partial_{tt}^2 \hat{\mathbf{u}} + 4\pi^2 \mu \hat{\mathbf{u}} + 4\pi^2 (\lambda + \mu) (\boldsymbol{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\zeta} = 0.$$

Le but ici n'est pas de résoudre explicitement l'équation, mais de dégager quelques propriétés et/ou solutions particulières. Pour tout $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d$, on considère $P(\boldsymbol{\zeta})$ la projection orthogonale sur $\boldsymbol{\zeta}^\perp$, et

$$\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\zeta}) = P(\boldsymbol{\zeta}) \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\zeta}), \quad \mathbf{W}(t, \boldsymbol{\zeta}) = \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{V}(t, \boldsymbol{\zeta}).$$

On a alors :

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{V} + 4\pi^2 \mu \mathbf{V} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{tt}^2 \mathbf{W} + 4\pi^2 (\lambda + 2\mu) \mathbf{W} = 0.$$

Ceci signifie que

$$\mathbf{v}(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{V}(t, \cdot)) \quad \text{et} \quad \mathbf{w}(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{W}(t, \cdot))$$

sont toutes deux solutions d'une équation des ondes, à savoir :

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} = 0, \quad \partial_{tt}^2 \mathbf{w} - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{w} = 0,$$

et bien sûr on retrouve $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ comme la superposition des deux. En termes d'ondes planes progressives monochromatiques, cette décomposition correspond à deux types d'ondes : celles de la forme $\underline{\mathbf{v}} e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ avec $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\xi}$ (ondes dites de cisaillement, de vitesse $c = \sqrt{\mu}$) et celles de la forme $\underline{\mathbf{w}} e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ avec $\mathbf{w} \parallel \boldsymbol{\xi}$ (ondes dites de compression, de vitesse $c = \sqrt{\lambda + 2\mu}$).

3 L'équation des ondes

Comme on l'a vu, l'équation des ondes régit (approximativement) de nombreux phénomènes physiques : propagation du son, propagation de vibrations dans les matériaux solides, propagation de la lumière, etc. Elle mérite donc qu'on s'y attarde un peu. Commençons par quelques propriétés de base, nous verrons ensuite sa résolution explicite (!, au moyen de formules intégrales tout de même) et sa résolution numérique (avec des méthodes transposables à des équations plus compliquées). Pour ce qui est de la modélisation, quelques exemples sont donnés en annexe, où l'on obtient l'équation des ondes monodimensionnelle dans différents contextes à partir de principes physiques simples.

3.1 Propriétés de base

- L'équation des ondes est conservative, au sens où l'énergie totale

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p, \text{ avec } \mathcal{E}_c := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx, \quad \mathcal{E}_p := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} c^2 \|\nabla u\|^2 dx,$$

est conservée au cours du temps. En effet, supposons que $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}([0, T]; H^2(\mathbb{R}^d))$ soit une solution. Alors, en multipliant l'équation par $\partial_t u$, on obtient après intégration par parties du second morceau :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} c^2 \|\nabla u\|^2 dx = 0.$$

L'équation modifiée (télégraphe+Klein-Gordon) :

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u + r \partial_t u + k u = 0$$

est quant à elle dissipative, car l'énergie modifiée :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} c^2 \|\nabla u\|^2 dx + \frac{k}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

décroît pour $r > 0$, sa dérivée étant inférieure ou égale à $-r \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx$.

- L'équation des ondes "propage l'information à vitesse finie". Cette propriété apparaîtra clairement sur les formules de résolution.

3.2 Formules de résolution

3.2.a En dimension 1

Forme générale des solutions. Plusieurs approches sont possibles. La première consiste à remarquer la décomposition de l'opérateur des ondes (appelé aussi D'Alembertien) en

$$\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x).$$

Par suite, pour résoudre

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0$$

il suffit de résoudre successivement

$$\begin{aligned}(\partial_t - c \partial_x)v &= 0, \\(\partial_t + c \partial_x)u &= v.\end{aligned}$$

Or la première équation est une simple *équation de transport*, dont la solution ne dépend que de $(x + ct)$. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que

$$\frac{d}{dt}v(y - ct, t) = \partial_t v - c \partial_x v = 0,$$

et donc $v(y - ct, t) = v(y, 0)$ quel que soit y . En renversant les notations, on a $v(x, t) = v(x + ct, 0)$ quel que soit x . Notons plus simplement $h(y) = v(y, 0)$. Il faut ensuite résoudre l'équation de transport avec terme source :

$$(\partial_t + c \partial_x)u(x, t) = h(x + ct).$$

La solution générale de l'équation homogène est $u(x, t) = g(x - ct)$ (par le même argument que ci-dessus). De plus, en notant f une primitive de $h/2c$, on a une solution particulière "évidente" $u(x, t) = f(x + ct)$. Finalement, par linéarité, la solution recherchée est de la forme :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Une autre méthode consiste à faire le changement de variables

$$(x, t) \mapsto (y, z) := (x + ct, x - ct).$$

On a

$$\partial_x = \partial_y + \partial_z, \quad \partial_t = c(\partial_y - \partial_z),$$

d'où

$$\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = c^2 ((\partial_y - \partial_z)^2 - (\partial_y + \partial_z)^2) = -2c^2 \partial_{yz}^2.$$

On doit donc résoudre le problème

$$\partial_{yz}^2 \tilde{u} = 0$$

dans les nouvelles variables, dont la solution est évidemment de la forme

$$\tilde{u}(y, z) = f(y) + g(z).$$

Problème de Cauchy sur \mathbb{R} . Soit à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Il s'agit d'exprimer les fonctions f et g apparaissant dans la forme générale de la solution en fonction de ϕ et ψ . Les deux équations à satisfaire sont

$$\begin{cases} \phi(x) = f(x) + g(x), \\ \psi(x) = c f'(x) - c g'(x). \end{cases}$$

En dérivant la première, on en déduit

$$\begin{cases} 2c f'(x) = c \phi'(x) + \psi(x), \\ 2c g'(x) = c \phi'(x) - \psi(x), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy + \text{cste}, \\ g(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy + \text{cste}', \end{cases}$$

Finalement, en revenant à l'équation non dérivée $\phi(x) = f(x) + g(x)$, on en déduit

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

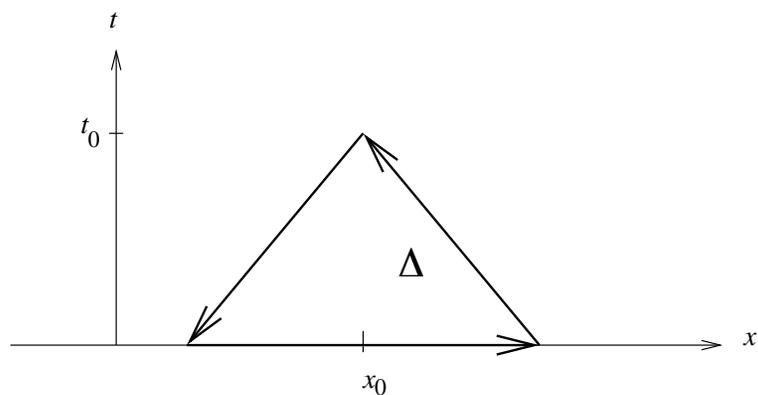
Cette formule est appelée *formule de D'Alembert*. Réciproquement, si ϕ est au moins deux fois dérivable, et ψ au moins une fois dérivable, la formule de D'Alembert fournit la solution cherchée.

On peut également résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des ondes avec terme source :

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = f.$$

Là encore diverses méthodes sont possibles. La plus directe consiste à utiliser la *formule de Green*. Étant donné (x_0, t_0) , considérons son "cône" de dépendance, qui est en fait le triangle

$$\Delta := \{(x, t); x_0 - c(t_0 - t) \leq x \leq x_0 + c(t_0 - t)\}.$$



On a

$$\int_{\Delta} (\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u) = - \int_{\partial\Delta} (\partial_t u \, dx + c^2 \partial_x u \, dt).$$

On décompose bien sûr cette intégrale en trois morceaux. L'un vaut simplement

$$\int_{x_0 - ct}^{x_0 + ct} \psi(y) \, dy.$$

D'autre part, le long du segment

$$\{(x, t); x = x_0 - c(t - t_0)\},$$

on a

$$\partial_t u \, dx + c^2 \partial_x u \, dt = -c(\partial_t u \, dt + \partial_x u \, dx).$$

Donc l'intégrale correspondante vaut

$$-c(u(x_0, t_0) - \phi(x_0 + ct_0)).$$

De la même façon, l'intégrale restante vaut

$$-c(u(x_0, t_0) - \phi(x_0 - ct_0)).$$

En additionnant, on obtient donc

$$\int_{\Delta} (\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u) \, dx \, dt = \int_{x_0-ct}^{x_0+ct} \psi(y) \, dy - 2cu(x_0, t_0) + c(\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)),$$

d'où la formule

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} (\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)) + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(y) \, dy + \frac{1}{2c} \int_{\Delta} f \, dx \, dt.$$

Problème de Dirichlet sur \mathbb{R}^+ . La résolution du problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0, & x > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x > 0, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

lorsque ϕ et ψ satisfont les conditions de compatibilité $\phi(0) = 0$ et $\psi(0) = 0$, se ramène à celle du problème de Cauchy par la méthode dite des images. En effet, si u est solution, alors $(x, t) \mapsto u(-x, t)$ est solution du problème symétrique, posé sur \mathbb{R}^- , avec ϕ et ψ prolongées en des fonctions impaires : $\phi(x) = -\phi(-x)$ et $\psi(x) = -\psi(-x)$. Donc la fonction u définie comme la superposition des deux solutions est une solution sur \mathbb{R} tout entier, sauf peut-être en 0. Réciproquement, soit

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) \, dy.$$

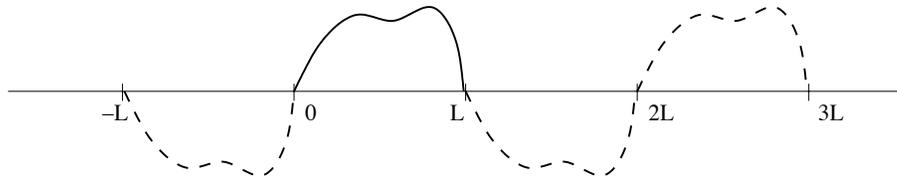
Cette fonction satisfait l'équation des ondes partout où elle est deux fois dérivable. C'est le cas si ϕ et ψ sont respectivement deux fois et une fois dérivable sur \mathbb{R}^+ , sauf peut-être sur le *cône caractéristique*

$$\{(x, t); x \pm ct = 0\}.$$

(Si ϕ satisfait la condition de compatibilité supplémentaire $\phi'(0) = 0$, il n'y a pas de problème.) De plus, lorsque ϕ et ψ sont impaires, il en est de même de u . Par conséquent, c'est bien une solution du problème de Dirichlet homogène, sauf peut-être sur la demi-droite $\{x = ct\}$. Lorsque $x > ct$, les fonctions ϕ et ψ sont évaluées en des points positifs. Lorsque $x < ct$, on peut vouloir exprimer $u(x, t)$ à l'aide des fonctions ϕ et ψ originales, définies sur \mathbb{R}^+ . On trouve ainsi la formule

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(ct + x) - \phi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(y) dy.$$

Problème de Dirichlet sur un intervalle borné $[0, L]$. La "méthode des images" s'applique comme précédemment : il suffit cette fois de prolonger ϕ et ψ en fonctions impaires et $2L$ -périodiques, comme sur le dessin ci-dessous,



et à nouveau calculer u par la formule de D'Alembert :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

Cela fournit bien une solution de l'équation des ondes, en dehors de

$$\{(x, t); x \pm ct \in L\mathbb{Z}\}.$$

Cette solution est impaire et $2L$ -périodique, donc satisfait les conditions de Dirichlet homogènes en $x = 0$ et $x = L$.

3.2.b En dimension 3

Problème de Cauchy sur \mathbb{R}^3 . Soit à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - c^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

On va utiliser la *méthode des moyennes sphériques*, qui permet de se ramener à un problème en dimension 1, que l'on sait résoudre d'après la première partie. Pour cela on associe à u la fonction de $(r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\bar{u}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u,$$

où S_r est la sphère de rayon r :

$$S_r := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = r\}.$$

Pour obtenir l'équation satisfaite par u , on applique la formule de Green sur la boule

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq r\},$$

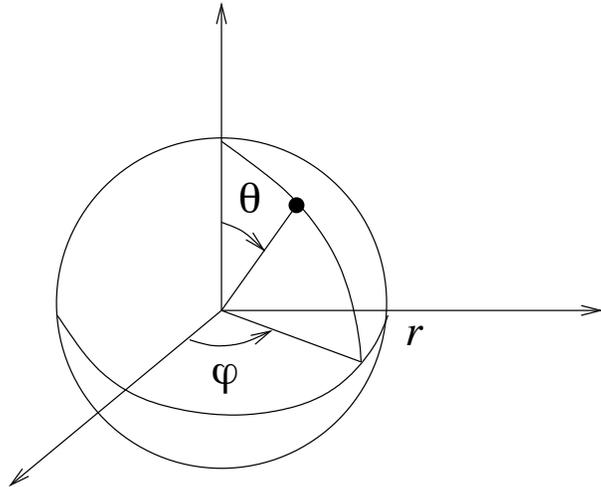
$$\int_{B_r} \Delta u = \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n},$$

où n est le vecteur normal unitaire sur $S_r = \partial B_r$, sortant de B_r . Pour que u soit solution de l'équation des ondes, il faut donc que

$$\int_{B_r} \partial_{tt}^2 u = c^2 \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n}.$$

En utilisant les coordonnées sphériques habituelles, représentées ci-dessous cette égalité s'écrit de façon équivalente :

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_{tt}^2 u \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho = c^2 r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_r u \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$



Or, par définition,

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

On déduit donc de l'équation précédente :

$$\int_0^r \rho^2 \partial_{tt}^2 \bar{u} \, d\rho = c^2 r^2 \partial_r \bar{u}.$$

D'où, en dérivant une fois par rapport à r :

$$r^2 \partial_{tt}^2 \bar{u} = c^2 \partial_r (r^2 \partial_r \bar{u}),$$

c'est-à-dire

$$\partial_{tt}^2 \bar{u} - c^2 \partial_{rr}^2 \bar{u} - 2 \frac{c^2}{r} \partial_r \bar{u} = 0.$$

(Ceci n'est rien d'autre que l'équation des ondes axisymétrique.) En posant $v := r \bar{u}$, on se ramène à une équation des ondes monodimensionnelle ordinaire :

$$\partial_{tt}^2 v - c^2 \partial_{rr}^2 v = 0.$$

Puisque v doit s'annuler en $r = 0$, cela revient à chercher la solution du problème de Dirichlet dans \mathbb{R}^+ , avec $v(r, 0) = r \bar{\phi}(r)$, $\partial_t v(r, 0) = r \bar{\psi}(r)$ et les notations évidentes

$$\bar{\phi}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} \phi, \quad \bar{\psi}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} \psi.$$

On a une formule explicite pour v :

$$v(r, t) = \frac{1}{2} ((ct + r) \bar{\phi}(ct + r) - (ct - r) \bar{\phi}(ct - r)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) dy, \quad 0 \leq r \leq ct,$$

que l'on peut réécrire

$$v(r, t) = \partial_t \left(\frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\phi}(y) \right) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) dy.$$

On récupère ensuite $u(0, t) = \bar{u}(0, t)$ par dérivation, puisque $\bar{u}(0, t) = \partial_r v(0, t)$. Comme

$$\partial_r \left(\frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) \right) \Big|_{r=0} = t \bar{\psi}(ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \psi,$$

avec la même formule pour ϕ , on en déduit

$$u(0, t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \phi \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \psi.$$

Bien sûr, on a la même formule lorsqu'on translate 0 en x_0 . Finalement, on a obtenu la formule générale, dite de *Kirchhoff* :

$$u(x_0, t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|x-x_0\|=ct} \phi \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|x-x_0\|=ct} \psi.$$

Il est possible de montrer cette formule en utilisant la transformation de Fourier. Le calcul est laissé en exercice.

On observe sur la formule de Kirchhoff que la solution au point (x_0, t) ne dépend des données initiales que sur la *sphère* $\{x; \|x - x_0\| = ct\}$. Autrement dit, si les données initiales sont concentrées dans $\{x; \|x - x_0\| \leq R\}$, la solution au point (x_0, t) est nulle pour tout $t > R/c$. C'est ce qu'on appelle le *principe de Huyghens*. Il est faux en dimension 2 comme on va le voir.

3.2.c En dimension 2

Problème de Cauchy sur \mathbb{R}^2 . On va se servir de la formule de Kirchhoff en dimension 3 pour obtenir une formule en dimension 2. Il suffit en effet de résoudre le problème étendu à \mathbb{R}^3 , avec ϕ et ψ indépendantes de la troisième variable $x_3 =: z$! Or, pour une fonction ψ dépendant seulement de $(x_1, x_2) =: (x, y)$, l'intégrale double $\int_{S_r} \psi$ se décompose en

$$\int_{S_r} \psi = 2 \int_{S_r \cap \{z > 0\}} \psi,$$

et la demi-sphère $S_r \cap \{z > 0\}$ est paramétrée par (x, y) :

$$S_r \cap \{z > 0\} = \{(x, y, z); x^2 + y^2 < r^2 \text{ et } z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\},$$

l'élément de surface étant

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

D'où

$$\int_{S_r} \psi = 2r \int_{x^2 + y^2 \leq r^2} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

On en déduit la formule explicite en dimension 2 :

$$u(x_0, y_0, t_0) = \partial_t \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq c^2 t^2} \frac{\phi(x, y)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} dx dy \right) + \frac{1}{2\pi c} \int_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq c^2 t^2} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

On remarque sur cette formule que, même avec des données initiales concentrées dans $\{x; \|x - x_0\| \leq R\}$, la solution au point (x_0, t) ne "s'éteint jamais".

3.3 Approximation numérique

Les formules de résolution explicites que l'on vient de voir ne sont pas toujours commodes à mettre en œuvre numériquement, d'autant qu'elles portent sur le problème de Cauchy posé dans tout l'espace, alors qu'en pratique on doit résoudre le problème avec des conditions aux limites. Même si on a vu comment traiter certains problèmes aux limites par la méthode des images, cela nécessite un calcul d'intégrale en chaque point de résolution, ce qui n'est pas la plus efficace de résoudre le problème. Nous allons construire et étudier une méthode de résolution approchée, très simple à implémenter et qui donne de bons résultats.

3.3.a Schéma de base

Une méthode élémentaire de discrétisation des É.D.P. est celle dite des *différences finies*, consistant à remplacer les dérivées exactes par des dérivées approchées discrètes au moyen de la formule de Taylor. En ce qui concerne l'équation des ondes, on doit approcher des dérivées secondes, ce que l'on peut faire en remarquant que pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 , la formule de Taylor donne

$$f''(y) = \frac{f(y+h) - 2f(y) + f(y-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h).$$

On se limitera dans cette présentation à la dimension 1.

Étant donné un pas d'espace Δx et un pas de temps Δt , on cherche à calculer u_j^n , supposé approcher la solution exacte de l'équation des ondes

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0$$

au point (x_j, t^n) , avec $x_{j+1} - x_j = \Delta x$ et $t^{n+1} - t^n = \Delta t$. En appliquant la formule précédente dans la direction du temps et dans la direction de l'espace, et en substituant les approximations ainsi obtenues dans l'équation des ondes on obtient le schéma centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

3.3.b Ordre

L'*ordre* en temps, respectivement en espace, d'un schéma est l'ordre en Δt , respectivement en Δx , de l'*erreur de troncature*, obtenue en appliquant le schéma à la solution exacte :

$$e_j^n := \frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1})}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2}.$$

Dans le cas présent, on a

$$e_j^n = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x),$$

le schéma est donc d'ordre 1 : c'est le minimum que l'on puisse faire pour espérer approcher effectivement la solution exacte !

3.3.c Stabilité

Une seconde propriété importante est la *stabilité* d'un schéma. Une condition nécessaire de stabilité dans ℓ^2 s'obtient facilement grâce à la transformée de Fourier discrète, en observant que pour l'opérateur de "shift" :

$$\mathcal{T} : u = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto U = (U_j := u_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \text{on a } (\mathcal{F}_d \circ \mathcal{T}(u))(\zeta) = \tilde{U}(\zeta) = e^{2i\pi\zeta} \tilde{u}(\zeta).$$

Le schéma centré se réécrivant

$$u_j^{n+1} = s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + 2(1-s)u_j^n - u_j^{n-1}, \quad s := c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2},$$

(noter que s est un nombre sans dimension) ou encore, en posant $v_j^n := u_j^{n-1}$:

$$\begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ u_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s) + s(\mathcal{T} + \mathcal{T}^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^n \\ u_j^n \end{pmatrix},$$

par transformation de Fourier discrète (en espace seulement !), on obtient

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^{n+1}(\zeta) \\ \hat{u}^{n+1}(\zeta) \end{pmatrix} = H(\zeta) \begin{pmatrix} \hat{v}^n(\zeta) \\ \hat{u}^n(\zeta) \end{pmatrix},$$

où $H(\zeta)$ est ce qu'on appelle la *matrice d'amplification* du schéma. Elle vaut simplement

$$H(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s) + s(e^{2i\pi\zeta} + e^{-2i\pi\zeta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s(1 - \cos 2\pi\zeta)) \end{pmatrix}.$$

L'itération ci-dessus se résout explicitement en

$$\begin{pmatrix} \widehat{v}^n(\zeta) \\ \widehat{u}^n(\zeta) \end{pmatrix} = H(\zeta)^n \begin{pmatrix} \widehat{v}^0(\zeta) \\ \widehat{u}^0(\zeta) \end{pmatrix}.$$

On pourra donc contrôler la norme L^2 de la solution à l'itération n en fonction de la norme L^2 initiale si et seulement si la norme de la norme de la matrice $H(\zeta)^n$ est uniformément bornée (en n et ζ). Par la propriété d'isométrie de la transformation de Fourier discrète, ceci fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité ℓ^2 du schéma. Dans l'état, elle n'est cependant pas très exploitable. On n'a pas précisé la norme matricielle à utiliser. En fait, il suffit qu'il en existe une telle que $H(\zeta)^n$ soit bornée. Une condition nécessaire pour cela, dite *condition de von Neumann*, est que le rayon spectral de $H(\zeta)$ soit inférieur ou égal à 1. Or les valeurs propres de $H(\zeta)$ sont les racines de

$$\lambda^2 - 2b(\zeta)\lambda + 1 = 0, \quad b(\zeta) := 1 - s(1 - \cos 2\pi\zeta).$$

Le produit de ces racines vaut donc 1. Si jamais elles sont réelles, l'une sera nécessairement de valeur absolue supérieure à 1, et la condition de von Neumann sera violée. Il faut donc que le discriminant de cette équation soit négatif (ou nul), c'est-à-dire que $|b(\zeta)| \leq 1$ quel que soit ζ . Ceci revient à demander $s \leq 1$. Réécrite en fonction de Δt et Δx , cette condition est

$$c \Delta t \leq \Delta x.$$

Ce type de condition, majorant le pas de temps en fonction du pas d'espace, est appelé *condition de Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL en abrégé). Par extension, le nombre sans dimension $c \Delta t / \Delta x$ est souvent appelé *nombre CFL*. On constate en pratique que si cette condition n'est pas satisfaite, le schéma "diverge" (au sens où les valeurs numériques obtenues en guise de solution approchée deviennent démesurément grandes) au bout de quelques itérations. On verra plus loin jusqu'à quel point la condition CFL est suffisante.

3.3.d Propriétés supplémentaires

On peut attendre d'un schéma qu'il préserve une version discrète de l'énergie; on va voir que c'est bien le cas. De plus, il serait souhaitable que le schéma propage l'information à la même vitesse (c) que l'équation des ondes. Ce point est assez délicat et lié au problème de la dispersion numérique que l'on étudiera plus loin en détail. De façon élémentaire, on peut rechercher des solutions numériques de la forme

$$u_j^n = \underline{u} e^{i(\xi j \Delta x - \omega n \Delta t)}$$

(analogue discret des ondes progressives monochromatiques continues). En substituant cette expression dans le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0,$$

on obtient la relation

$$1 - \cos \omega \Delta t = s(1 - \cos \xi \Delta x), \quad s = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}.$$

On voit que sous la CFL $s \leq 1$, il existe bien de telles ondes (ce schéma particulier n'est pas dissipatif; on va voir qu'il préserve une énergie discrète), ayant pour vitesse

$$c_* = \frac{\text{Arccos}(1 - s(1 - \cos \xi \Delta x))}{\xi \Delta t}.$$

Cette vitesse est différente de c , sauf dans le cas particulier $s = 1$. On a donc intérêt en pratique à s'approcher le plus près possible de la limite $s = 1$ autorisée par la condition CFL.

Pour trouver une estimation d'énergie discrète, multiplions

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

par $(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})$ et faisons la somme sur j . On obtient

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n - (u_j^n - u_j^{n-1})}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^n + u_j^n - u_j^{n-1}) - c^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n - (u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) = 0,$$

d'où, après translation d'indice dans la deuxième somme :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - (u_j^n - u_j^{n-1})^2}{\Delta t^2} - c^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)(u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1})}{\Delta x^2} + c^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)(u_j^{n-1} - u_{j+1}^{n-1})}{\Delta x^2} = 0.$$

Par suite, on a conservation de l'énergie discrète :

$$\mathcal{E}^{n+1/2} := \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right).$$

On remarque que l'"énergie potentielle discrète" (c'est-à-dire le deuxième morceau de $\mathcal{E}^{n+1/2}$) n'est pas automatiquement positif, contrairement à l'énergie potentielle exacte.

Termes d'ordre inférieur. Il est facile de discrétiser les termes d'ordre inférieur dans l'équation modifiée (télégraphe+Klein-Gordon) :

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u + r \partial_t u + k u = 0.$$

Il suffit de considérer le schéma (toujours centré) :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + r \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + k u_j^n = 0.$$

On montre alors la décroissance de l'énergie discrète modifiée :

$$\mathcal{E}^{n+1/2} := \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) + k \sum_j \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} u_j^n.$$

En reprenant le calcul précédent, on montre en effet facilement que

$$\mathcal{E}^{n+1/2} - \mathcal{E}^{n-1/2} + r \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 = 0.$$

3.3.e Implémentation

Le schéma décrit ci-dessus est très facile à implémenter. Voici par exemple un programme Matlab qui l'utilise pour résoudre le problème de Dirichlet.

Explications

Programme

Vitesse des ondes

```
c=1
```

Longueur du domaine spatial

```
L= 100;
```

Borne inférieure du domaine

```
xm = 0;
```

Borne supérieure du domaine

```
xp = xm+L;
```

Nombre de points en espace

```
J=500;
```

Pas d'espace

```
dx = L/(J-1);
```

Nœuds du maillage

```
x=xm:dx:xp;
```

Condition initiale

```
umax=1;
```

```
u0=2.*umax.*(L/2-umax.*abs(x-L./2))./L;
```

```
umax1=1;
```

```
u1=2.*umax1.*(L/2-umax1.*abs(x-L./2))./L;
```

Tracé initial

```
plot(x,u0,'LineWidth',2)
```

```
up=max(umax,umax1);
```

```
axis([xm xp -up up])
```

```
pause
```

CFL

```
cfl = 1;
```

```
s = cfl^2;
```

Pas de temps

```
dt = cfl*dx/c;
```

Temps de calcul

```
T = 1000*dt;
```

Démarrage

```
temps = 0;
```

Début de boucle

```
while temps<T
```

```
temps = temps+dt;
```

```
ulpast = [u1(1) u1(1:J-1)];
```

```
ulforwd = [u1(2:J) u1(J)];
```

```
u = s.*(ulpast+ulforwd)+2.*(1-s).*u1-u0;
```

Bord gauche

```
u(1)=0;
```

Bord droit

```
u(J)=0;
```

```
u0=u1;
```

```
u1=u;
```

Tracé

```
plot(x,u0,'LineWidth',2)
```

```
axis([xm xp -up up])
```

```
drawnow
```

Fin de boucle

```
end
```

Ceci résout le problème de Dirichlet homogène. Pour le problème de Neumann homogène, seules les deux lignes concernant les conditions au bord changent, évidemment. Elles sont simplement remplacées par

$$u(1) = u(2) ;$$

$$u(J) = u(J-1) ;$$

4 Schémas aux différences finies

De façon générale, les É.D.P. d'évolution, de type hyperbolique en particulier, se prêtent bien à l'approximation par des schémas aux différences finies, tout du moins en dimension 1 d'espace (en dimension supérieure, on préfère souvent l'approche par *volumes finis*, de principe différent mais dont les "briques" sont essentiellement des schémas aux différences finies monodimensionnels).

Ce chapitre a pour objet de présenter et étudier les schémas classiques pour l'équation de transport

$$\partial_t u = a \partial_x u$$

ou plus généralement pour les systèmes de la forme

$$\partial_t U = A \partial_x U,$$

où A est une matrice à coefficients réels (sur laquelle on fera quelques hypothèses). L'équation des ondes peut en particulier se mettre sous cette forme, en posant $v = \partial_x u$, $w = (1/c) \partial_t u$ et en notant $U = (v, w)^t$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Un paragraphe sera également consacré aux schémas aux différences finies pour l'équation de la chaleur.

4.1 Schémas centrés pour l'équation de transport

Comme on l'a vu pour l'équation des ondes, la méthode des différences finies est basée sur la formule de Taylor. Dans sa version la plus simple, elle consiste simplement à remplacer les dérivées par des taux d'accroissement. Il reste cependant à choisir quels points utilisent ces taux d'accroissement. Le schéma utilisé pour l'équation des ondes était naturellement centré, car il n'y avait que des dérivées secondes. Pour l'équation de transport, d'ordre 1 en temps et en espace, on peut envisager de discrétiser de façon décentrée en temps (schéma d'Euler) et centrée en espace. Cela donne :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Mais ce schéma est *inconditionnellement instable*! En effet, par transformation de Fourier discrète, on obtient

$$\widehat{u^{n+1}}(\zeta) = h(\zeta) \widehat{u^n}(\zeta), \quad h(\zeta) := 1 + i a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi\zeta)$$

et $h(\zeta)$ est clairement de module supérieur à un (pour $a \neq 0$).

Divers “bons” schémas sont cependant construits à partir du schéma centré, modifié de façon à le rendre stable.

Une première méthode pour stabiliser un schéma est de le rendre *implicite*. Ici cela donne

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} a (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}),$$

qui est *inconditionnellement stable*: par transformation de Fourier discrète,

$$\widehat{u^{n+1}}(\zeta) = h(\zeta) \widehat{u^n}(\zeta), \quad h(\zeta) := \left(1 - i a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi\zeta)\right)^{-1},$$

qui est toujours de module inférieur à un. En contrepartie, ce schéma est assez coûteux, car son implémentation nécessite l’inversion d’une matrice, et présente d’autres problèmes (liés à la dissipation et la dispersion numériques, voir §4.7). Un autre schéma, aussi coûteux mais plus précis (étant d’ordre 2), est celui de *Crank-Nicolson*, qui fait la moyenne entre l’explicite et l’implicite:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{4 \Delta x} a (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Son facteur d’amplification est

$$h(\zeta) := \frac{1 + i a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi\zeta)}{1 - i a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi\zeta)},$$

de module exactement un, quel que soit ζ .

Une autre méthode permettant de stabiliser le schéma centré de base est de remplacer u_j^n par une valeur moyenne, ce qui donne la classe des schémas de type *Lax-Friedrichs*

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha u_{j+1}^n + \beta u_j^n + \alpha u_{j-1}^n}{2\alpha + \beta} + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

où α et β sont des paramètres positifs.

Exercice: montrer que ce schéma est stable sous la CFL

$$a \Delta t \leq \frac{2\alpha}{2\alpha + \beta} \Delta x.$$

On peut aussi remplacer u_j^n par u_j^{n-1} , et Δt par $2 \Delta t$, ce qui revient à approcher $\partial_t u$ de façon centrée. Cela donne le *schéma saute-mouton* (“leap-frog” en anglais) :

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Ce schéma est stable sous la CFL

$$a \Delta t < \Delta x.$$

Ici l'égalité $a \Delta t = \Delta x$ est exclue car elle entraîne une résonance responsable d'une instabilité (voir [4], p. 83–84). Ce schéma a d'autres inconvénients. Comme il est à deux pas, on doit faire appel à un autre schéma pour calculer u^1 . De plus, on doit gérer la présence d'un *mode parasite*. Voir [4], p. 84–88 pour plus de détails.

Enfin, on peut ajouter un terme au schéma centré, qui le rende à la fois stable et d'ordre 2. C'est ainsi que l'on obtient le *schéma de Lax-Wendroff* :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2 \Delta x^2} a^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Il est stable sous la CFL

$$a \Delta t \leq \Delta x.$$

4.2 Schémas centrés pour les systèmes hyperboliques

Tous les schémas décrits précédemment pour l'équation de transport s'adaptent de façon immédiate aux systèmes de la forme

$$\partial_t U = A \partial_x U.$$

Pour espérer avoir des schémas stables, il faut déjà que le système d'É.D.P le soit : une condition nécessaire et suffisante pour cela est que la matrice A soit diagonalisable sur \mathbb{R} . En effet, par transformation de Fourier, on a

$$\widehat{U}(\zeta, t) = e^{2i\pi t \zeta A} \widehat{U}(0, t),$$

et donc une CNS pour contrôler la norme L^2 de la solution en fonction de la norme L^2 de la donnée initiale est

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \|e^{i\theta A}\| < +\infty.$$

Or on montre (version facile du théorème de Kreiss) que ceci est vrai si et seulement si A est diagonalisable sur \mathbb{R} . On dit alors du système d'É.D.P. considéré qu'il est *hyperbolique*.

Si l'on reprend l'analyse de la stabilité des schémas à un pas précédents (donc à l'exclusion du schéma saute-mouton) le facteur d'amplification $h(\zeta)$ est simplement remplacé par une matrice $H(\zeta)$, définie de façon analogue avec A à la place de a , qui se diagonalise dans la même base que A . Par suite, la condition de von Neumann est nécessaire et suffisante pour la stabilité de ces schémas: dans toutes les conditions CFL il suffit de remplacer a par le rayon spectral de A .

Remarque : avec le schéma centré à deux pas pour l'équation des ondes, la matrice d'amplification (voir le §3.3.c) n'est pas diagonalisable en 0 et n'est donc pas uniformément bornée: on a (par récurrence)

$$H(0)^n = \begin{pmatrix} 1 - n & n \\ -n & n + 1 \end{pmatrix}.$$

Cette croissance en $\mathcal{O}(n)$ est une réminiscence des solutions exactes en $\mathcal{O}(t)$ et donc inévitable, voir [4] (p. 159–160) pour plus de détails.

4.3 Schémas “décentrés”

Pour l'équation de transport, on peut utiliser une discrétisation décentrée de la dérivée spatiale, à condition qu'elle le soit dans le “bon sens”. Ce sens est déterminé par le signe de a . Supposons pour fixer les idées que a soit positif. La solution exacte de $\partial_t u = a \partial_x u$ étant donnée par

$$u(x, t) = u(x + at, 0),$$

cela signifie que l'information est propagée vers la gauche. Ceci suggère de décentrer le schéma de sorte que le calcul de u^{n+1} n'utilise de u^n que ce qui vient de la droite, c'est-à-dire

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} a (u_{j+1}^n - u_j^n).$$

L'étude de stabilité confirme le choix du décentrement. En effet, on trouve comme facteur d'amplification

$$h(\zeta) = 1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{2i\pi\zeta} - 1),$$

qui est de module inférieur à 1 pour tout ζ si seulement si

$$0 \leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Bien sûr, si a était négatif, on obtiendrait un schéma stable en décentrant dans l'autre sens:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} a (u_j^n - u_{j-1}^n).$$

On voit que ces schémas décentrés ne sont transposables qu'aux systèmes ayant une matrice dont les valeurs propres sont toutes de même signe. Ceci peut être très contraignant en pratique. En particulier, ceci ne s'applique pas au système correspondant à l'équation des ondes, pour lequel les valeurs propres sont précisément c et $-c$.

Il existe un schéma valable pour n'importe quelle matrice diagonalisable sur \mathbb{R} , et qui coïncide avec un schéma décentré lorsque les valeurs propres sont toutes de même signe. C'est le schéma de *Godunov*, que l'on va présenter ici pour un système linéaire mais qui a été initialement introduit pour les systèmes hyperboliques non-linéaires (voir le chapitre 5).

Pour un système linéaire

$$\partial_t U = A \partial_x U$$

le schéma de Godunov coïncide avec le schéma de Roe; il est défini en décomposant la matrice A en

$$A = A^+ + A^-, \quad A^\pm := \frac{1}{2} (A \pm |A|),$$

où $|A|$ est définie comme

$$|A| = R \operatorname{diag}(|\lambda_k|) R^{-1},$$

si R est une matrice inversible de vecteurs propres de A et λ_k les valeurs propres associées (de sorte que $R^{-1}AR$ soit diagonale et de coefficients λ_k). Par construction, les valeurs propres de A^+ sont positives (ou nulles) et celles de A^- sont négatives. On peut donc appliquer les schémas décentrés à ces matrices. Par superposition (justifiée par la linéarité du système), on obtient comme schéma pour le système de départ:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^- (U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+ (U_{j+1}^n - U_j^n).$$

Sa condition de stabilité est clairement

$$\max_k (|\lambda_k|) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Son implémentation demande de diagonaliser A . Pour les systèmes "standard" comme celui de l'acoustique par exemple, la diagonalisation se fait à la main. Pour des systèmes plus compliqués, on peut être amené à utiliser une méthode numérique de réduction...

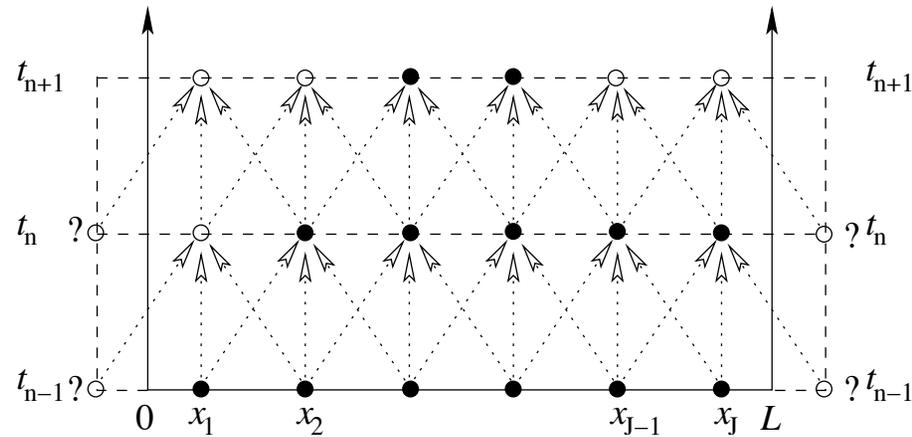


Figure 4: Représentation d'un schéma explicite à 3 points

4.4 Le problème des conditions aux limites

En pratique, les schémas numériques sont implémentés sur un nombre fini de points. Le calcul de la solution numérique demande un traitement particulier aux extrémités. En effet, le calcul de u^{n+1} nécessite des valeurs de u^n qui sortent du domaine de calcul (voir la figure 4.4). Il s'agit donc d'attribuer à des points "fictifs" des valeurs numériques permettant de poursuivre le calcul, sans nuire à la consistance (ces valeurs ne doivent pas introduire une erreur trop grande) ni à la stabilité. C'est un problème délicat, qui dépend du contexte physique.

Conditions aux limites artificielles

Si les bords du domaine sont *artificiels*, c'est-à-dire si l'on souhaite calculer dans une fenêtre $[0, L]$ la solution approchée d'un problème posé dans tout l'espace (avec donnée initiale constante en dehors de $]0, L[$), c'est un problème de *conditions aux limites artificielles*. Avec un schéma dit à 3 points comme ceux présentés plus haut, on a besoin de valeurs en un point (ou plutôt une maille) supplémentaire de part et d'autre de l'intervalle $[0, L]$. Si l'on parvient à affecter des valeurs à ces points fictifs qui "laissent sortir les ondes", sans réflexion, on parle alors de conditions aux limites *absorbantes*.

L'obtention de conditions aux limites absorbantes est un problème assez délicat en général. On peut déjà se poser la question pour l'É.D.P., indépendamment de tout schéma numérique. Le cas de l'équation des ondes en dimension 1 est très simple à comprendre. En effet, on sait que toute solution est de la forme $(x, t) \mapsto f(x + ct) + g(x - ct)$, où $(x, t) \mapsto f(x + ct)$ est une onde progressive se propageant vers la gauche et

$(x, t) \mapsto g(x - ct)$ est une onde progressive se propageant vers la droite. Donc, si l'on ne veut pas d'onde rentrante en $x = 0$, il faut et il suffit d'imposer la condition

$$\partial_t u - c \partial_x u = 0,$$

ce qui entraîne $g = 0$. De façon symétrique, la condition

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0,$$

ne laisse pas entrer d'onde en $x = L$. Le cas d'un système hyperbolique général $\partial_t U = A \partial_x U$ est un peu plus compliqué mais l'idée est la même. Si (r_1, \dots, r_N) est une base de vecteurs propres de A , de valeurs propres associées $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, toute solution se décompose en

$$U(x, t) = \sum_k \alpha_k(x, t) r_k \quad \text{avec} \quad \partial_t \alpha_k = \lambda_k \partial_x \alpha_k, \quad \text{d'où} \quad \alpha_k(x, t) = \alpha_k(x + \lambda_k t, 0).$$

Ainsi, en supposant les λ_k tous non nuls,

$$U(x, t) = f(x, t) + g(x, t), \quad f(x, t) = \sum_{\lambda_k > 0} \alpha_k(x, t) r_k, \quad g(x, t) = \sum_{\lambda_k < 0} \alpha_k(x, t) r_k.$$

Une condition aux limites absorbante en $x = 0$ doit "tuer" g . Pour cela, il faut et il suffit que $\Pi^- U = 0$, où Π^- est la projection sur le sous-espace $\text{Vect}(r_k; \lambda_k < 0)$ parallèlement à $\text{Vect}(r_k; \lambda_k > 0)$. La projection Π^- admet une expression très simple lorsque A a ses valeurs propres toutes distinctes, ce qui est souvent le cas en pratique (on dit alors que le système $\partial_t U = A \partial_x U$ est *strictement hyperbolique*), grâce aux *vecteurs propres à gauche* de A . Ce sont en fait des vecteurs lignes ℓ_m tels que $\ell_m A = \lambda_m \ell_m$. Par définition, si $\lambda_m \neq \lambda_k$, $\ell_m r_k = 0$. Donc si les λ_k sont tous distincts, il existe une base (ℓ_1, \dots, ℓ_N) telle que

$$\ell_m r_k = \delta_k^m \quad \text{pour tous } m, k \in \{1, \dots, N\}.$$

Par suite, la décomposition de U sur la base (r_1, \dots, r_N) est donnée par $\alpha_k = \ell_k \cdot U$. Si pour fixer les idées on ordonne les λ_k de sorte que $\lambda_k < 0$ équivaut à $k \leq p$, on a

$$\Pi^- U = 0 \quad \Leftrightarrow \ell_k \cdot U = 0 \quad \text{pour tout } k \leq p.$$

Remarque : pour l'équation des ondes, la condition aux limites absorbante obtenue plus haut en $x = 0$, s'écrit, sur les composantes ($v = \partial_x u$, $w = c^{-1} \partial_x u$), $v = w$: ceci revient à demander que $U = (v, w)^t$ soit vecteur propre pour la valeur propre $+c$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc qu'en général, les conditions aux limites absorbantes pour les É.D.P. hyperboliques donnent une information sur certaines composantes de l'inconnue seulement. Ceci ne résout pas le problème pour les schémas numériques, qui ont besoin d'une valeur pour toutes les composantes de U aux noeuds fictifs.

Pour le schéma de Godunov/Roe, une idée assez naturelle est de poser $U_0^n = U_1^n$. On voit alors que le schéma se réduit au point $j = 1$ à

$$U_1^{n+1} = U_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+ (U_2^n - U_1^n),$$

ce qui ne touche effectivement pas aux composantes de U associées aux modes rentrants:

$$\Pi^- U_1^{n+1} = \Pi^- U_1^n.$$

De façon symétrique, poser $U_{J+1}^n = U_J^n$ permet de ne pas introduire de mode rentrant au bord droit. Les conditions aux limites artificielles à retenir sont donc très simples: il suffit de recopier dans les mailles fictives les valeurs calculées dans les mailles extrêmes!

En fait, cette même idée marche aussi pour les schémas centrés explicites présentés plus haut. La justification est fondée sur la notion de *flux numérique*, que l'on verra plus en détail au chapitre 5. (En particulier, il n'y a pas besoin pour les schémas centrés explicites de calculer la projection Π^- : pour les schémas à 3 points, il suffit de poser

$$U_0^n = U_1^n \quad \text{et} \quad U_{J+1}^n = U_J^n.$$

(En revanche, utiliser $U_0^{n+1} = U_1^{n+1}$ ou $U_{J+1}^{n+1} = U_J^{n+1}$ dans le schéma centré implicite réserve de drôles de surprises!)

Résolution numérique d'un problème aux limites physique

Si le bord du domaine correspond à des frontières physiques, typiquement l'entrée et la sortie d'un tuyau en mécanique des fluides, alors on a en principe à notre disposition des conditions aux limites physiques. Cependant, ces conditions sont en général partielles. Rappelons en effet que pour un système hyperbolique $\partial_t U = A \partial_x U$, toute solution s'écrit

$$U(x, t) = \sum_k \alpha_k(x, t) r_k \quad \text{avec} \quad \alpha_k(x, t) = \alpha_k(x + \lambda_k t, 0).$$

On voit donc en particulier que pour $\lambda_k > 0$, $\alpha_k(0, t)$ est déterminé de façon unique par la donnée initiale $\alpha_k(\cdot, 0)$ sur l'intervalle $[0, L]$, tant que $\lambda_k t \leq L$. Il serait déraisonnable de vouloir imposer une valeur différente de α_k au bord $x = 0$. Et en effet, on montre que les seuls problèmes

aux limites bien posés sur une demi-droite sont du type

$$\begin{cases} \partial_t U = A \partial_x U, & x > 0, t > 0, \\ \Pi^- U(0, t) = g(t), & t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x), & x > 0, \end{cases}$$

où Π^- est la projection sur les modes rentrants définie ci-dessus. La résolution numérique de tels problèmes nécessite donc Π^- . La méthode naturelle consiste à calculer $U_1^{n+1} = \Pi^- U_1^{n+1} + \Pi^+ U_1^{n+1}$ grâce d'une part aux conditions aux limites "physiques" et d'autre part au schéma décentré appliqué aux modes sortants:

$$\begin{aligned} \Pi^- U_1^{n+1} &= g(t^{n+1}), \\ \Pi^+ U_1^{n+1} &= \Pi^+ U_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+ (U_2^n - U_1^n). \end{aligned}$$

4.5 Schémas pour l'équation de la chaleur

On peut également discrétiser les équations de type parabolique par des différences finies.

Le schéma le plus simple, centré et explicite, s'écrit pour l'équation de la chaleur $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

C'est un schéma d'ordre 1 en temps et 2 en espace par construction, c'est-à-dire que l'erreur commise lorsqu'on l'applique à une solution exacte (nécessairement régulière d'après l'analyse de l'équation de la chaleur), est

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} - \kappa \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2} = \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2).$$

Son facteur d'amplification vaut

$$h(\zeta) = 1 - 2\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos(2\pi\zeta)),$$

qui reste inférieur ou égal à 1 en valeur absolue si et seulement si

$$\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1.$$

On voit que cette condition est beaucoup plus contraignante sur le pas de temps que la condition CFL rencontrée pour les équations hyperboliques. À nouveau, on peut s'en affranchir en "implicitant" le schéma. En effet, le facteur d'amplification du schéma implicite centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

vaut

$$\frac{1}{1 + 2\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos(2\pi\zeta))},$$

qui est toujours inférieur ou égal à 1. Le schéma centré implicite est aussi d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Un schéma à la fois inconditionnellement stable et d'ordre 2 en temps est celui de Crank-Nicolson, obtenu comme pour les équations hyperboliques en faisant la moyenne du schéma explicite et du schéma implicite:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \kappa \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2}.$$

Cependant, avec des données initiales peu régulières, le schéma implicite donne de meilleurs résultats.

Quant au schéma saute-mouton,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2},$$

il est inconditionnellement instable, donc à proscrire.

4.6 Convergence des schémas aux différences finies linéaires

Rappelons (voir §2.5.a) qu'à une suite de carré sommable $u = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, on peut associer une fonction de carré intégrable sur \mathbb{R} par un opérateur d'*interpolation*. Ici, on introduit naturellement le pas d'espace $h = \Delta x$ comme paramètre dans l'opérateur d'interpolation. On définit donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^h : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ u &\mapsto \mathcal{E}^h(u) = u^h := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \psi_j^h \end{aligned}$$

où

$$\psi_j^h(x) = \frac{\sin(\pi(x - jh)/h)}{\pi(x - jh)/h}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \psi_j^h = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbf{1}_{h|\zeta| \leq 1/2} e^{-2i\pi n h \zeta}\right).$$

Autrement dit, u^h s'exprime à l'aide de la transformée de Fourier discrète, que l'on renormalise également en utilisant h :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d^h : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L^2(-1/(2h), 1/2h) \\ u &\mapsto \mathcal{F}_d^h(u) = \tilde{u}^h := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{-2i\pi j h \zeta}. \end{aligned}$$

On a en effet:

$$u^h(x) = \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} \tilde{u}^h(\zeta) e^{2i\pi x \zeta} d\zeta.$$

Théorème 9 (Lax-Richtmyer) *Un schéma consistant avec un problème d'évolution linéaire bien posé est convergent si et seulement s'il est stable.*

Dans cet énoncé, la notion de stabilité est un peu plus faible que celle déjà rencontrée. Plus précisément, notons ici g (au lieu de h , réservé au pas d'espace) le facteur d'amplification du schéma: c'est une fonction de ζ , qui dépend également des paramètres $h = \Delta x$ et $k = \Delta t$, que l'on fait apparaître en exposant ci-dessous.

Définition 1 *Un schéma de facteur d'amplification $g^{(h,k)}$ est dit stable dans un domaine $\Lambda = \{(h, k)\}$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|g^{(h,k)}(h\zeta)| \leq 1 + Ck,$$

pour tous $\zeta \in \mathbb{R}$ et $(h, k) \in \Lambda$.

Cette notion admet une augmentation possible de la norme ℓ^2 de la solution numérique, qui reste toutefois bornée tant que $n\Delta t$ est borné (c'est-à-dire tant qu'on résout sur un intervalle de temps borné!). En effet, la solution numérique, calculée par le schéma vérifie

$$\|u^n\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq (1 + C\Delta t)^n \|u^0\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq e^{Cn\Delta t} \|u^0\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

La notion de consistance est très faible. Elle demande juste que l'erreur de troncature tende vers 0 lorsque $(\Delta t, \Delta x)$ tend vers $(0, 0)$ dans Λ (sans notion d'ordre). Cette convergence se traduit en terme de symbole dans le lemme suivant.

Lemme 2 *Soit une É.D.P. d'évolution $\partial_t u = P \cdot u$, où P est un opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbb{R} . On note p son symbole, au sens où la solution du problème de Cauchy*

$$\partial_t u = P \cdot u, \quad u|_{t=0} = u_0$$

est

$$u(\cdot, t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{tp(\zeta)} \widehat{u}_0).$$

Alors pour un schéma consistant avec cette É.D.P., de facteur d'amplification $g^{(h,k)}$, on a nécessairement pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(k,h) \xrightarrow{\Delta} (0,0)} \frac{e^{kp(\zeta)} - g^{(h,k)}(h\zeta)}{k} = 0.$$

Dém. La fraction

$$\frac{e^{kp(\zeta)} - g^{(h,k)}(h\zeta)}{k}$$

coïncide avec l'erreur de troncature associée à la solution particulière

$$u(x, t) = e^{2i\pi\zeta x} e^{tp(\zeta)}$$

(où ζ est fixé).

Prenons par exemple l'équation de transport ($P = a \partial_x$) avec le schéma décentré. On a

$$p(\zeta) = 2i\pi a \zeta \quad \text{et} \quad g^{(h,k)}(h\zeta) = 1 + a \frac{k}{h} (e^{2i\pi h \zeta} - 1) \sim 1 + 2i\pi a \zeta k \sim e^{2i\pi a \zeta k}$$

lorsque (h, k) tend vers $(0, 0)$ avec k/h borné.

La convergence du schéma dans l'énoncé (vague) du théorème 9 est à prendre au sens suivant: quelles que soient v , solution du problème exact, et u , solution du schéma numérique, si $\mathcal{E}^h(u^0)$ tend vers $v|_{t=0}$, alors $\mathcal{E}^h(u^n) - v|_{t=n\Delta t}$ tend vers dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $(\Delta t, \Delta x)$ tend vers $(0, 0)$ dans Λ avec $0 \leq n\Delta t \leq T$.

Dém. Montrons donc la convergence sous les hypothèses de consistance et stabilité. Le fait que le problème exact soit bien posé signifie qu'il existe $C_T > 0$ tel que

$$|e^{tp(\zeta)}| \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \forall \zeta \in \mathbb{R}.$$

De façon analogue, la stabilité du schéma implique

$$|(g^{(h,k)}(h\zeta))^n| \leq C'_T, \quad 0 \leq nk \leq T.$$

La combinaison des deux entraîne

$$|e^{nkp(\zeta)} - (g^{(h,k)}(h\zeta))^n| \leq n \max(C_T, C'_T) |e^{kp(\zeta)} - g^{(h,k)}(h\zeta)|,$$

ce qui implique, d'après le lemme 2,

$$|e^{nk p(\zeta)} - (g^{(h,k)}(h\zeta))^n| \leq n k \varepsilon(h, k),$$

où ε tend vers 0 avec (h, k) . Comme

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^h(u^n))(\zeta) = \mathbf{1}_{h|\zeta| \leq 1/2} \mathcal{F}_d^h(u^n)(\zeta) = (g^{(h,k)}(h\zeta))^n \mathcal{F}_d^h(u^0)(\zeta),$$

on a par le théorème de Plancherel :

$$\|v(t_n) - \mathcal{E}^h(u^n)\|_{L^2}^2 = \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} |e^{tn p(\zeta)} \widehat{v}_0(\zeta) - (g^{(h,k)}(h\zeta))^n \mathcal{F}_d^h(u^0)(\zeta)|^2 d\zeta + \int_{|\zeta| > 1/(2h)} |e^{tn p(\zeta)} \widehat{v}_0(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Supposons momentanément que $\widehat{v}_0 = \mathcal{F}_d^h(u^0)$ sur l'intervalle $] -1/(2h), 1/(2h)[$. Alors

$$\|v(t_n) - \mathcal{E}^h(u^n)\|_{L^2}^2 \leq T \varepsilon(h, k) \|\widehat{v}_0\|_{L^2}^2 + C_T^2 \int_{|\zeta| > 1/(2h)} |\widehat{v}_0(\zeta)|^2 d\zeta,$$

ce qui tend bien vers 0 avec (h, k) .

Le cas général s'en déduit. En effet, soit w^0 la suite dont la transformée de Fourier discrète coïncide avec \widehat{v}_0 sur $] -1/(2h), 1/(2h)[$, alors

$$\|v(t_n) - \mathcal{E}^h(u^n)\|_{L^2} \leq \|v(t_n) - \mathcal{E}^h(w^n)\|_{L^2} + \|\mathcal{E}^h(w^n - u^n)\|_{L^2}.$$

Le premier morceau tend vers 0 d'après ce qui précède, et le carré du second morceau est majoré par

$$C_T' \|w^0 - u^0\|_{\ell^2}^2 = C_T' \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} |\widehat{v}_0(\zeta) - \mathcal{F}(\mathcal{E}^h(u^0))|^2 d\zeta \leq C_T' \|v_0 - \mathcal{E}^h(u^0)\|_{L^2}^2,$$

qui tend vers 0 par hypothèse. □

4.7 Dissipation et dispersion numérique

Si la dissipation numérique est souhaitable pour les équations paraboliques, qui sont elles-mêmes dissipatives, elle ne l'est pas pour les équations hyperboliques. Malheureusement, la plupart des schémas sont dissipatifs, sauf à s'approcher (parfois dangereusement) de la limite de stabilité (voir par exemple le schéma centré sur l'équation des ondes).

La dissipation est présente lorsque le facteur d'amplification est de module strictement inférieur à 1. (On pourrait donner une définition plus précise, et parler d'ordre de dissipation...)

La dispersion numérique est associée à une erreur dans la vitesse de propagation.

Pour fixer les idées, supposons à nouveau que l'équation exacte soit une équation de transport $\partial_t u = a \partial_x u$. Elle admet comme solutions particulières les ondes progressives monochromatiques de la forme $u(x, t) = u_0 e^{2i\pi\zeta(x+at)}$, vérifiant ainsi

$$u(x + \Delta t, t) = u(x, t) e^{2i\pi\zeta a \Delta t}.$$

Si on applique un schéma de facteur d'amplification $g^{(h,k)}$ à l'analogue discret d'une telle onde, $u_j^n := u_0 e^{2i\pi\zeta(jh+ank)}$, on obtient

$$u_j^{n+1} = g^{(h,k)}(h\zeta) u_j^n = |g^{(h,k)}(h\zeta)| e^{2i\pi\zeta k \alpha(h\zeta)} u_j^n,$$

et en général $\alpha(h\zeta) \neq a$.

Exemple. Pour le schéma décentré, en notant $\lambda = k/h$,

$$g^{(h,k)}(\theta) = 1 + a \frac{k}{h} (e^{2i\pi h \theta} - 1), \quad |g^{(h,k)}(\theta)|^2 = 1 - 4a\lambda(1 - a\lambda) \sin^2 \pi \theta,$$

et

$$\tan(2\pi\lambda\theta\alpha(\theta)) = \frac{a\lambda \sin(2\pi\theta)}{1 - a\lambda(1 - \cos(2\pi\theta))},$$

si bien que $\alpha(\theta) = a$ pour $a\lambda = 1$ seulement.

Plus généralement, on peut considérer un train d'onde $u(x, t) = u_0(x + at) e^{2i\pi\zeta(x+at)}$. Si le schéma n'est pas dissipatif (c'est-à-dire si $|g^{(h,k)}(\theta)| = 1$), on peut montrer que la solution numérique avec donnée initiale $u_j^0 := u_0(jh) e^{2i\pi\zeta jh}$ est proche de

$$u_0(jh + \gamma(h\zeta)nk) e^{2i\pi\zeta(jh + \alpha(h\zeta)nk)} \quad \text{où} \quad \gamma(\theta) := \alpha(\theta) + \theta \alpha'(\theta).$$

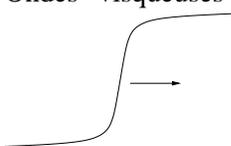
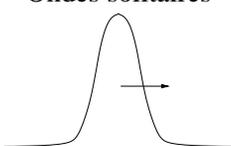
Type d'É.D.P.	Parabolique	Hyperbolique	Dispersif
Type d'ondes	Ondes "visqueuses" 	Ondes de choc 	Ondes solitaires 
	Burgers-Hopf : $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = \partial_{xx}^2 u$	Burgers : $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$	Korteweg-de Vries : $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) + k \partial_{xxx}^3 u = 0$
	Réaction-diffusion : $\partial_t u = \kappa \Delta u + f(u)$	Trafic routier : $\partial_t \rho + \partial_x(\rho v(\rho)) = 0$	Boussinesq : $\partial_{tt}^2 u + \partial_x f(u) - c^2 \partial_{xx}^2 u + k \partial_{xxxx}^4 u = 0$
	+ Dynamique des fluides visqueux compressibles	+ Dynamique des gaz, etc.	Schrödinger : $i h \partial_t u = \Delta u + f(u)$

Tableau 3: Quelques É.D.P. non linéaires.

5 Ondes non-linéaires

Les É.D.P. linéaires sont en général des approximations de modèles non-linéaires, beaucoup plus complexes à étudier. Nous en donnons quelques exemples dans le tableau 5, en se limitant aux modèles dans lesquels interviennent des phénomènes de propagation d'ondes.

Les ondes progressives régulières s'obtiennent comme orbites hétéroclines d'équations différentielles. En général, c'est un problème difficile de trouver de telles orbites. Dans le cas d'équations scalaires (ou d'équations ayant suffisamment d'intégrales premières pour se ramener à une équation scalaire), l'existence d'orbites hétéroclines entre deux points fixes consécutifs est quasi-évidente (comme conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz et du théorème des bouts). La méthode dite de Melnikov (voir le cours d'équations différentielles) peut permettre de montrer leur persistance par variation de petits paramètres. Un autre problème important est celui de la stabilité des ondes progressives correspondantes comme solutions particulières de l'É.D.P.. C'est un sujet de recherches très actif en mathématiques appliquées, dans lequel certaines techniques remontent seulement aux années 1990.

Quant aux ondes de choc, elle se trouvent en résolvant un problème purement algébrique, à condition de définir en quel sens ces ondes discontinues sont des solutions de l'É.D.P. concernée. C'est, entre autres, ce que l'on va expliquer dans la suite, sur l'exemple du modèle de trafic routier dit LWR, attribué à 3 auteurs : Lighthill, Whitham et Richards.

5.1 Le modèle LWR

5.1.a Présentation

Diagramme de Greenshield.

5.1.b Méthode des caractéristiques

5.1.c Ondes de détente

5.1.d Ondes de choc

5.1.e Schéma de Godunov

Offre et demande dans le diagramme de Greenshield.

A Annexe

A.1 Utilisation de la FFT avec Matlab

Voir le tableau 4.

Tableau 4: Quelques lignes Matlab à propos des séries de Fourier

Données communes	Fonction continue f = [y(1:P/2-1) 1 - y(P/2:P)];	Fonction discontinue f = [ones(1,(P/2)) - ones(1,(P/2))];
N=50;		
M=500; dx=1/(M-1); x=0:dx:1;	SigmaN = 0.25; for n=0:N SigmaN = SigmaN - 2./(pi^2.* (2.* n + 1)^2) .* cos(2.* pi.* (2.* n + 1). * x); end plot(x,SigmaN,'LineWidth',2)	SigmaN = 0; for n=0:N SigmaN = SigmaN + 4./(pi.* (2.* n + 1)) .* sin(2.* pi.* (2.* n + 1). * x); end plot(x,SigmaN,'LineWidth',2)
P=500; pp=1:1:P; dy=1/(P-1); y=0:dy:1;	cfexact = [0.25 - 2./(pi^2.* (2.* pp - 1).^2)]; cfapp = 2.* fft(f,P)./P; cfapp(1) = cfapp(1)./2; figure(2) plot(pp(1:P/10),cfexact(1:P/10)); hold on plot(pp(1:P/10),cfapp(1:P/10),'*');	cfexact = 4./(pi.* (2.* pp - 1)); cfapp = 2.* i.* fft(f,P)./P; figure(2) plot(pp(1:P/10),cfexact(1:P/10)); hold on plot(pp(1:P/10-1),cfapp(2:P/10),'*');
	Sigapp = 0; for p=1:2*N+2 Sigapp = Sigapp +cfapp(p). * cos(2.* pi.* (p - 1). * x); end figure(3) plot(x,Sigapp,'LineWidth',2)	Sigapp = 0; for p=2:2*N+2 Sigapp = Sigapp +cfapp(p). * sin(2.* pi.* (p - 1). * x); end figure(3) plot(x,Sigapp,'LineWidth',2)

Tableau 5: Quelques unités physiques

symbole	signification	unité S.I.
m	masse	kilogramme (kg)
l	longueur	mètre (m)
t	temps	seconde (s)
T	température	Kelvin (K)
v	vitesse	$m.s^{-1}$
f	force	Newton, $1 N = 1 kg.m.s^{-2}$
p	pression	Pascal, $1 Pa = 1 kg.m^{-1}.s^{-2}$
e	énergie	Joule, $1 J = 1 kg.m^2.s^{-2}$

A.2 Quelques modèles d'équation d'ondes 1D

Pour information on mentionnera entre $\{ \}$ la dimension des quantités physiques mises en jeu, selon le tableau 5.

A.2.a Cordes vibrantes

Le déplacement d'une corde en tension obéit, au moins au premier ordre, à une équation des ondes, comme l'avait déjà montré D'Alembert au XVIIIème siècle. Les paramètres physiques mis en jeu sont la densité linéaire $\rho_0 \{m.l^{-1}\}$, reliée à la densité ω_0 (ou masse volumique $\{m.l^{-3}\}$) par

$$\rho_0 = \sigma_0 \omega_0,$$

où $\sigma_0 \{l^2\}$ est la section de la corde, et T_0 la tension initiale de la corde, nombre > 0 homogène à une force.

Soit $u(x, t) \in \mathbb{R}^3$ le déplacement *transversal* de la corde à l'instant t , par rapport à une position de référence $x e_1 \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$. On suppose le déplacement longitudinal négligeable. Autrement dit, le point situé en $x e_1$ dans la position de référence se retrouve en $w(x, t) = x e_1 + u(x, t)$, et $u(x, t) \perp e_1$.

Soit $T(x, t)$ la tension de la corde en $w(x, t)$. C'est un nombre positif tel qu'un morceau de corde $[x, x + \delta x]$ ($\delta x > 0$) soit soumis à la force

$$T(x + \delta x, t) \theta(x + \delta x, t) - T(x, t) \theta(x, t),$$

où $\theta(x, t) = \partial_x w(x, t)$ est tangent à la corde en $w(x, t)$.

L'accélération de la corde au point $w(x, t)$ est simplement $\partial_{tt}^2 w(x, t) = \partial_{tt}^2 u(x, t)$. La relation fondamentale de la mécanique, ou loi de Newton ($F = m \gamma$) appliquée au morceau de corde $[x, x + \delta x]$ s'écrit donc, pour la composante parallèle à e_1 :

$$T(x + \delta x, t) - T(x, t) = 0,$$

et pour la composante orthogonale à e_1 :

$$T(x + \delta x, t) \partial_x u(x + \delta x, t) - T(x, t) \partial_x u(x, t) = \int_x^{x+\delta x} \rho_0 \partial_{tt}^2 u(y, t) dy.$$

Par suite, $T(x, t) = T_0(t)$ est indépendant de x , et en faisant tendre δx vers 0 dans la seconde équation, on obtient

$$T_0 \partial_{xx}^2 u = \rho_0 \partial_{tt}^2 u.$$

Si T_0 est de plus supposé indépendant de t , on a bien une équation des ondes, avec

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}},$$

à condition que T_0 soit effectivement positif (une corde qui n'est pas en tension s'affaisse et ne peut pas vibrer!).

A.2.b Barres élastiques

À l'inverse d'une corde, dans une barre élastique rigide, on peut ne considérer que les déplacements longitudinaux, c'est-à-dire qu'un point situé en $x e_1$ dans la position de référence se retrouve après compression ou étirement en $w(x, t) = x e_1 + u(x, t)$ avec $u(x, t) \parallel e_1$.

On définit encore $T(x, t)$ la tension de la barre en $w(x, t)$, mais cette fois elle n'a pas de signe défini (la barre pouvant être indifféremment en compression ou en étirement). Une loi de l'élasticité affirme que pour faire varier de δl un morceau de longueur l_0 il faut une variation de tension δT proportionnelle à $\delta l/l_0$. Quantitativement, on définit E_0 le *module d'Young* du matériau tel que

$$\delta T = E_0 \sigma_0 \frac{\delta l}{l_0}.$$

Par définition, E_0 est un nombre positif homogène à une pression. En appliquant cette loi à un morceau $[x, x + \delta x]$, qui devient $[x + u(x, t), x + \delta x + u(x + \delta x, t)]$, on obtient

$$T(x, t) - T_0(x) = E_0 \sigma_0 \frac{u(x + \delta x, t) - u(x, t)}{\delta x},$$

d'où à la limite lorsque δx tend vers 0 :

$$T(x, t) = T_0(x) + E_0 \sigma_0 \partial_x u.$$

D'autre part, d'après la loi de Newton appliquée au morceau de corde $[x, x + \delta x]$:

$$T(x + \delta x, t) - T(x, t) = \int_x^{x+\delta x} \rho_0 \partial_{tt}^2 u(y, t) dy,$$

d'où à la limite lorsque δx tend vers 0 :

$$\partial_x T = \rho_0 \partial_{tt}^2 u.$$

En supposant la tension de référence T_0 homogène, c'est-à-dire indépendante de x , on en déduit que u (ainsi que T d'ailleurs, par dérivation) satisfait l'équation des ondes de vitesse

$$c = \sqrt{\frac{E_0}{\omega_0}}.$$

Si l'on s'intéresse à la densité ρ le long de la barre, on voit assez facilement qu'elle est donnée par

$$\rho(x, t) = \rho_0 (1 - \partial_x u).$$

En effet, pour chaque morceau de longueur initiale l_0 on a

$$\rho l = \rho_0 l_0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \frac{\delta l}{l_0} = 0.$$

En appliquant cette relation au morceau $[x, x + \delta x]$ et en faisant tendre δx vers 0, on en déduit

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \partial_x u = 0.$$

Par suite, en supposant la densité initiale ρ_0 homogène, on voit par dérivation que ρ satisfait la même équation des ondes que u (et T).

A.2.c Tuyaux sonores

Pour un fluide, un peu d'intuition physique montre que la tension T est reliée à la pression p par $p = -T/\sigma_0$. D'où,

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} = -\frac{1}{\chi_0} \frac{\delta v}{v_0},$$

où χ_0 est le coefficient de compressibilité (sans dimension), et v le volume. Or dans un tube de section constante,

$$\frac{\delta v}{v_0} = \frac{\delta l}{l_0}.$$

Donc on a une loi analogue à celle de l'élasticité, avec

$$E_0 = \frac{p_0}{\chi_0}.$$

En particulier, pour un gaz parfait adiabatique,

$$p v^\gamma = \text{cte},$$

d'où $\chi_0 = 1/\gamma$ et $E_0 = \gamma p_0$. On trouve comme vitesse de propagation

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega_0}}.$$

C'est l'expression bien connue de la vitesse du son.

Application numérique. Dans l'air, assimilé à un gaz di-atomique, on a approximativement $\gamma = 7/5$ (on obtient ce nombre en raisonnant sur le nombre n de degrés de liberté des molécules; de façon générale, $\gamma = (5 + n)/(3 + n)$). La loi des gaz parfaits

$$p = \frac{\omega RT}{M}, \quad R = 8,3144 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}, \quad M = 28,8.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1},$$

permet de calculer

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \simeq 332 \text{ m.s}^{-1}$$

à une température de 273 K , ce qui correspond très bien à la réalité !

Index

- É.D.P. conservative, 6
- É.D.P. dissipative, 6
- équation des ondes axisymétrique, 43
- équation du télégraphe, 5

- équation de transport, 37

- Bessel
 - inégalité de, 10

- cône caractéristique, 41
- cône de dépendance, 39
- caractéristique
 - courbe, 35
- convolution, 16
- Courant-Friedrichs-Lewy
 - condition de, 48
 - nombre de, 48

- D'Alembert
 - formule de , 39
- D'Alembertien, 37
- différences finies, 46
- Dirac
 - masse de, 23
- dispersion
 - relation de, 4
- dispersive
 - onde, 4

- erreur de troncature, 46
- estimation d'énergie, 6

- Fourier
 - coefficients de, 10
 - série de , 10
- fréquence, 4

- Green
 - formule de , 39

- Huygens
 - principe de, 44
- hyperbolique
 - système, 55

- Kirchhoff
 - formule de , 44

- Lax-Friedrichs
 - schéma de, 54
- Lax-Wendroff
 - schéma de, 55
- longueur d'onde, 4

- méthode des images, 40
- maillage, 26
- matrice d'amplification, 47
- moyenne sphérique, 42

- noyau de régularisation, 16

onde
 plane, 4
 plane progressive, 4
 plane progressive monochromatique, 4
ordre, 46

Paley-Wiener
 théorème de , 19

Parseval
 identité de , 11

pulsation, 4

schéma
 de Lax-Friedrichs, 54
 de Lax-Wendroff, 55
 implicite, 54
 saute-mouton, 54

stabilité, 47

support compact, 14

trigonométrique
 polynôme, 10

vecteur d'onde, 4

vitesse
 de groupe, 4
 de phase, 4

von Neumann
 condition de , 48

Références

- [1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.
- [2] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage. Calcul numérique. Ondelettes*. Masson, 1990.
- [3] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman, 3ème édition.
- [4] John C. Strikwerda. *Finite difference schemes and partial differential equations*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1989.

Table des matières

1	Notions de base	2
2	Analyse de Fourier	9
2.1	Séries de Fourier	9
2.2	Transformation de Fourier des fonctions intégrables	12
2.3	Transformation de Fourier sur L^2	15
2.3.a	Transformation de Fourier en dimension quelconque	18
2.3.b	Espaces de Sobolev construits sur L^2	20
2.3.c	Transformées de Fourier classiques	20
2.4	Transformation de Fourier sur \mathcal{S}'	22
2.5	Transformation de Fourier discrète	26
2.5.a	Cas d'un réseau infini	26
2.5.b	Cas d'un réseau fini	27
2.6	Application à quelques É.D.P.	32
2.6.a	Équation de la chaleur	32
2.6.b	Équation de Schrödinger	33
2.6.c	Équations hyperboliques	34
3	L'équation des ondes	36
3.1	Propriétés de base	36
3.2	Formules de résolution	37
3.2.a	En dimension 1	37
3.2.b	En dimension 3	42
3.2.c	En dimension 2	45
3.3	Approximation numérique	46
3.3.a	Schéma de base	46
3.3.b	Ordre	46
3.3.c	Stabilité	47
3.3.d	Propriétés supplémentaires	48
3.3.e	Implémentation	50

4	Schémas aux différences finies	53
4.1	Schémas centrés pour l'équation de transport	53
4.2	Schémas centrés pour les systèmes hyperboliques	55
4.3	Schémas "décentrés"	56
4.4	Le problème des conditions aux limites	58
4.5	Schémas pour l'équation de la chaleur	61
4.6	Convergence des schémas aux différences finies linéaires	62
4.7	Dissipation et dispersion numérique	65
5	Ondes non-linéaires	67
5.1	Le modèle LWR	68
5.1.a	Présentation	68
5.1.b	Méthode des caractéristiques	68
5.1.c	Ondes de détente	68
5.1.d	Ondes de choc	68
5.1.e	Schéma de Godunov	68
A	Annexe	68
A.1	Utilisation de la FFT avec Matlab	68
A.2	Quelques modèles d'équation d'ondes 1D	70
A.2.a	Cordes vibrantes	70
A.2.b	Barres élastiques	71
A.2.c	Tuyaux sonores	73