La musique des surfaces

Par Sylvie Benzoni-Gavage, mathématicienne et directrice de l'Institut Henri Poincaré

Au-delà de la rime, les mots équation et partition ont en commun de déclencher au premier regard une émotion. Selon qui les regarde, l'émotion peut aller du plaisir à l'effroi, en passant par l'admiration ou la souffrance, souvent liée à des souvenirs d'enfance.

Objet mathématique avec son équation sur l'étiquette

Collection de l'Institut Henri Poincaré © Bertrand Michau

Depuis l'Antiquité et l'« harmonie des sphères » des pythagoriciens, on a souvent associé mathématiques et musique. Mais peut-on comparer, très concrètement, la façon dont mathématiciennes et musiciennes lisent, déchiffrent, qui une équation, qui une partition ? La question m'a été posée devant la collection d'objets mathématiques de l'Institut Henri Poincaré.

Pour la plupart centenaires, en bois, en fils, en plâtre ou en papier mâché, certaines de ces sculptures mathématiques sont assorties d'une étiquette montrant leur « équation ».

En l'occurrence, en faisant le tour de l'étiquette de cet objet on peut lire :

$$y^4 + y^2(2x^2 + 6ax - z^2 + a^2) + x^4 - 2ax^3 - x^2(z^2 - a^2) + \frac{z^4}{2} + 5\frac{a^2}{4}z^2 - \frac{a^4}{16} = 0.$$

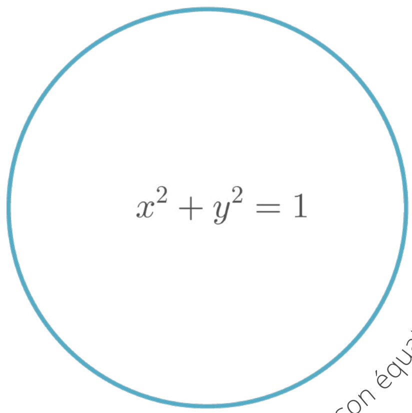
Pour autant, cette équation n'inspire en général pas grand chose aux personnes de passage, fussent-elles mathématiciennes. Une musicienne découvrant une partition éprouve-t-elle la même perplexité ?

Interprétation

La réponse dépend évidemment de la complexité de l'équation ou de la partition. Quelques notions de musique suffisent à entendre la mélodie de l'**Ode à la joie** en voyant cette partition :

Partition sur l'air de l'Ode à la joie, Beethoven

De même, quelques notions de mathématiques permettent de se représenter mentalement un **cercle** devant cette équation :



Cercle entourant son équation

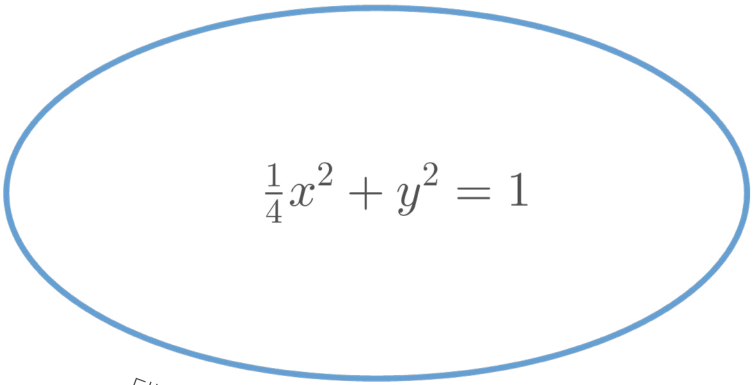
La lectrice attentive aura remarqué que le lien entre l'équation et le cercle se fait grâce au théorème de Pythagore.

Devant des équations ou des partitions plus compliquées, il faut plus d'expérience, voire être carrément experte. En supposant que la musique parle à un plus grand nombre de personnes que les mathématiques, nous allons poursuivre la comparaison avec les partitions pour entrer dans le royaume des équations.

Voyons une première analogie, en pensant au « x » de l'équation comme au **tempo** sur la partition. Dans l'interprétation de la partition, le tempo dicte la durée du morceau en indiquant, par exemple, le nombre de noires à jouer par minute. Dans la représentation graphique de l'équation, les valeurs prises par x dictent la largeur de la figure par rapport à sa hauteur. Imaginons par exemple qu'on divise par deux le tempo sur la partition, c'est-à-dire qu'on passe de 100 noires par minute à 50 noires par minute :

♩ $= 100 \quad \rightsquigarrow \quad$ ♩ $= 50$

Ceci étire le thème musical, qui devient deux fois plus lent. De manière analogue, changer x en $x/2$ dans l'équation étire le cercle en une **ellipse** deux fois plus large.



Ellipse entourant son équation

Nous sommes encore loin des surfaces : le solfège des équations commence par les courbes comme l'apprentie pianiste commence par jouer à une main. Nous n'en sommes pas si loin, cependant.

Avec un peu d'entraînement, l'apprentie pianiste jouera des deux mains cette partition.

Extrait de la partition de l'ode à la joie, Beethoven

La main gauche de la mathématicienne est une dimension supplémentaire. En ajoutant une dimension, c'est-à-dire un z dans l'équation, le cercle deviendra **sphère**, et l'ellipse deviendra. Ainsi, la mathématicienne reconnaît au premier coup d'œil une sphère (de rayon 1) devant l'équation :

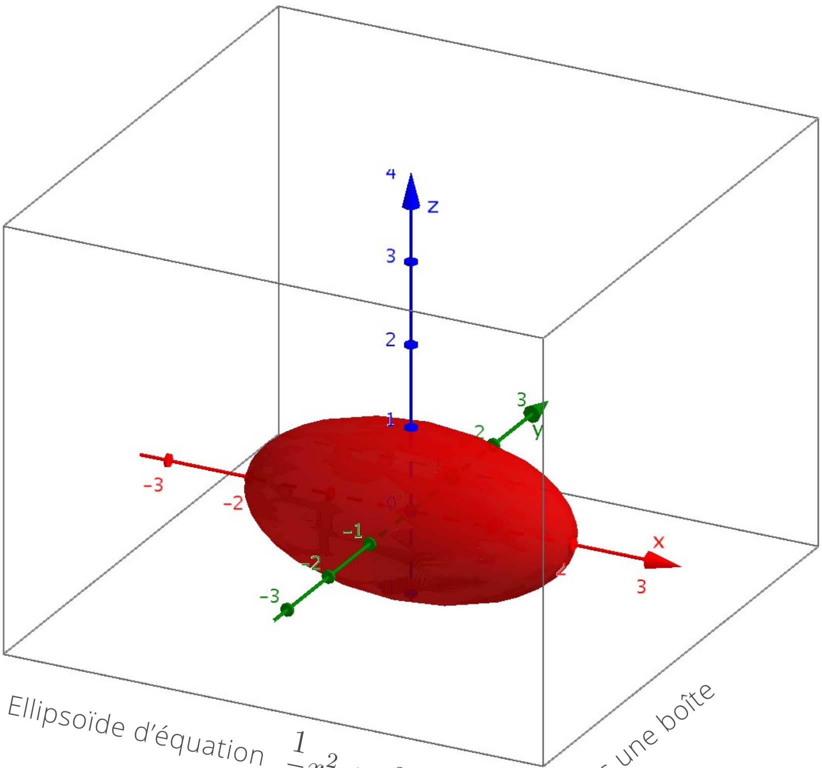
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Les ellipsoïdes s'obtiennent en « étirant » x, y ou z, le « ou » n'étant pas exclusif, comme on le fait pour passer du cercle à l'ellipse.

Dans la grande famille des surfaces, l'ellipsoïde, dont la sphère est un cas particulier, a la propriété de tenir dans une boîte de taille finie. On dit qu'il est **compact**.

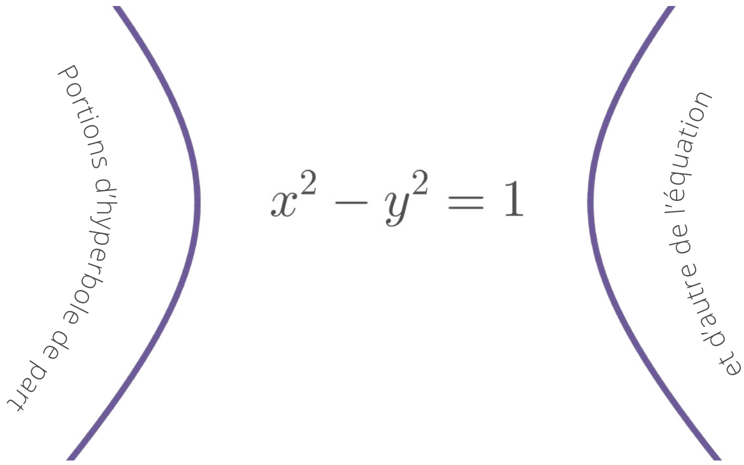
Modèle d'ellipsoïde avec lignes de courbure

Collection de l'Institut Henri Poincaré © Henri Duvillard



Ellipsoïde d'équation $\frac{1}{4}x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dans une boîte

C'est loin d'être une situation générale pour les courbes et les surfaces. Revenons par exemple à l'équation du cercle, qui est compact lui aussi. Comme un seul signe bémol ou dièse change la mélodie, par le simple changement du signe $+$ en $-$ dans l'équation on obtient non plus un cercle mais une **hyperbole**.



Non seulement elle n'est pas compacte mais elle est en deux morceaux. On dit qu'elle n'est pas **connexe**. Elle a deux branches, toutes deux infinies. En ajoutant une dimension comme l'apprentie pianiste ajoute sa main gauche on peut obtenir une surface connexe, c'est-à-dire en un seul morceau, mais tout aussi **infinie** que l'hyperbole : un **hyperboloïde à une nappe**.

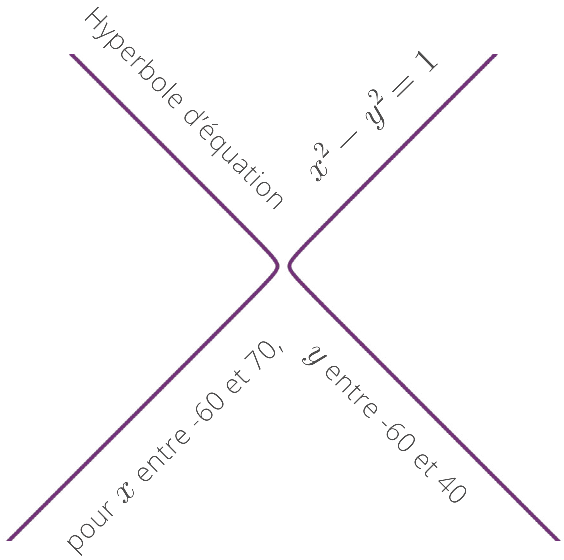
Sculpture représentant un hyperboloïde à une nappe

Collection de l'Institut Henri Poincaré © Henri Duvillard

Le dessin de l'hyperbole comme la sculpture de l'hyperboloïde sont tronqués par rapport à la représentation mentale qu'en a la mathématicienne devant leur équation. Car cette équation est comme une partition qui demanderait à la musicienne de jouer indéfiniment.

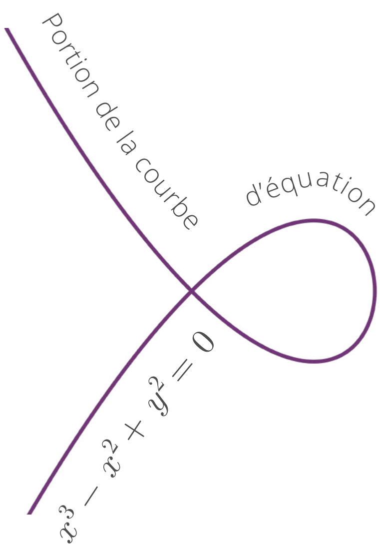
Or, notre monde et notre vie étant finies, il faut bien s'arrêter quelque part. C'est le cas sur le dessin de l'hyperbole, qui est coupé de manière arbitraire et non symétrique, contrairement à l'hyperbole elle-même, qui est parfaitement **symétrique** par retournement vertical ou horizontal. C'est aussi le cas de la sculpture de l'hyperboloïde. En vérité la surface de la sculpture n'est qu'une toute petite partie de l'hyperboloïde, et bien sûr les bords plats n'en font pas partie.

En coupant plus loin et en représentant à une autre échelle ces objets mathématiques, on en aurait une impression bien différente, un peu comme en accélérant la musique. Vue de loin, notre hyperbole ne ressemble à rien d'autre qu'à deux droites perpendiculaires, elle se confond avec ses asymptotes, comme une musique tellement accélérée qu'on n'y reconnaîtrait qu'une seule note, pure comme un la électronique.



Poursuivons nos analogies. Telle la musicienne qui recherche des points remarquables sur la partition, comme les éventuels points d'orgue par exemple, la mathématicienne recherche dans l'équation des « points singuliers ». Ceux-ci correspondent à des **singularités** sur l'objet mathématique associé à l'équation. Ils apparaissent de façon moins explicite que le symbole du **point d'orgue**

sur la partition. Il faut en général faire un calcul pour les localiser. Lorsque l'équation n'est pas trop compliquée, le calcul est rapide. Par exemple pour l'équation, on s'aperçoit vite que la courbe correspondante à ce que l'on appelle un « point double » en $x = 0$ et $y = 0$.



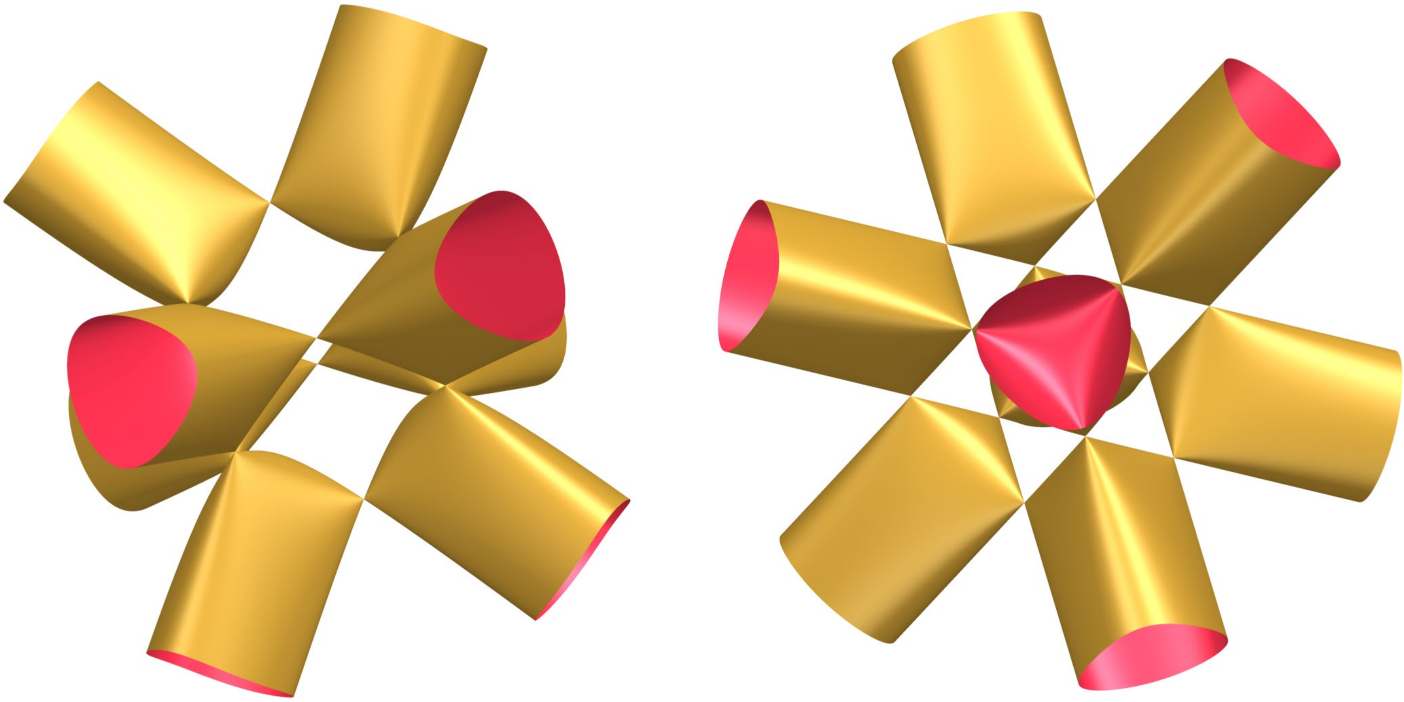
Face à l'équation d'une surface, la mathématicienne recherchera également les singularités. Nombre d'objets de la collection de l'IHP sont précisément là pour représenter des singularités. C'est le cas de l'objet montré au début de ce texte. Ou encore de celui-ci, représentation là encore tronquée d'une surface dont l'équation est écrite sur l'étiquette.

Notons que les équations sur les étiquettes comportent des lettres en plus des traditionnelles variables x, y et z : la lettre a pour la première, b pour la seconde. Ces lettres représentent des **paramètres**, des sortes de curseurs que l'on peut choisir pour modifier la surface, un peu comme les **armures** de bémols ou de dièses sur la partition modifient la tonalité du morceau.

Objet mathématique avec son équation

Collection de l'Institut Henri Poincaré © Henri Duvillard

De nos jours, on peut utiliser l'ordinateur pour représenter des surfaces. En particulier, le logiciel libre **Surfer** permet de représenter des surfaces dont on connaît l'équation. Ainsi on obtient pour l'objet ci-dessus les images suivantes, celle de gauche étant orientée à peu près comme sur la photo.

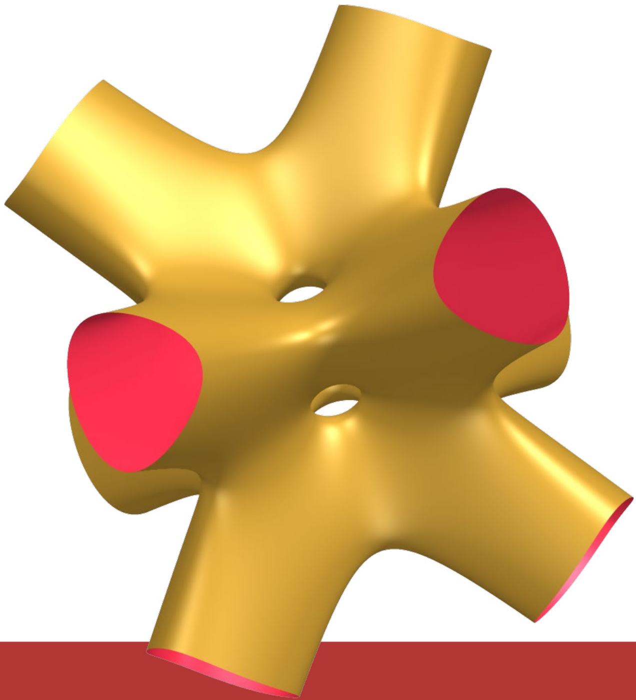


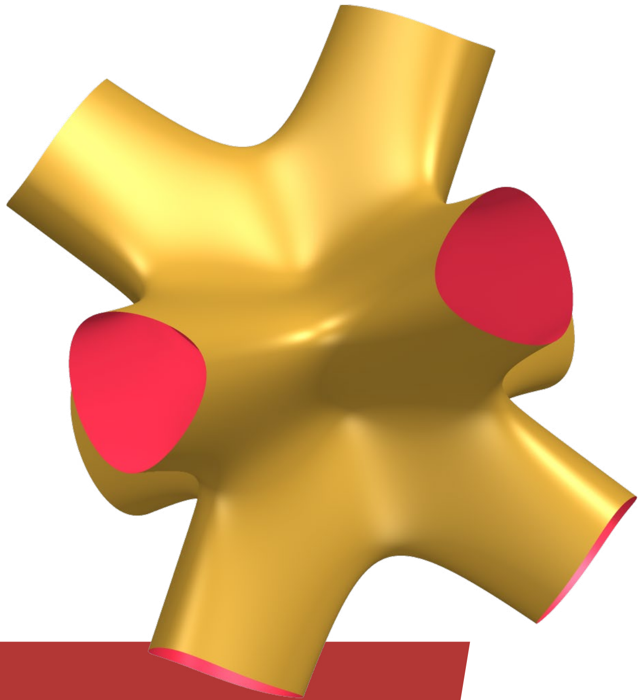
Représentation, sous deux angles différents, de la surface d'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 - (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) - b^2(x^2 + y^2 + z^2) + b^4 = 0 \text{ avec } b^2 = 1/3$$

On observe, plus facilement sur l'image de droite, douze singularités : douze **points doubles**, où la surface semble vouloir se séparer en deux morceaux pointus. En fait, le vrai nombre de points doubles de cette surface est seize. Il nous en manque quatre. Où sont-ils ? On ne les verrait toujours pas, même si on traçait une plus grande portion de la surface, en la tronquant beaucoup plus loin : ces quatre points singuliers sont à l'infini ! Pour saisir le sens de cette affirmation il faudrait entrer sur le terrain de la **géométrie projective**, l'art d'envoyer et de manipuler des points à l'infini.

Si l'on revient à l'équation, en modifiant la puissance du paramètre b dans le dernier terme, on observe une modification des singularités jusqu'à leur « effacement ». Sur les deux exemples ci-dessous il reste des « trous » lisses à gauche, et plus aucune singularité à droite.





Représentation de la surface d'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 - (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) - b^2(x^2 + y^2 + z^2) + c = 0$$

avec $b^2 = 1/3$ et $c = b^6$ à gauche, $c = b^8$ à droite

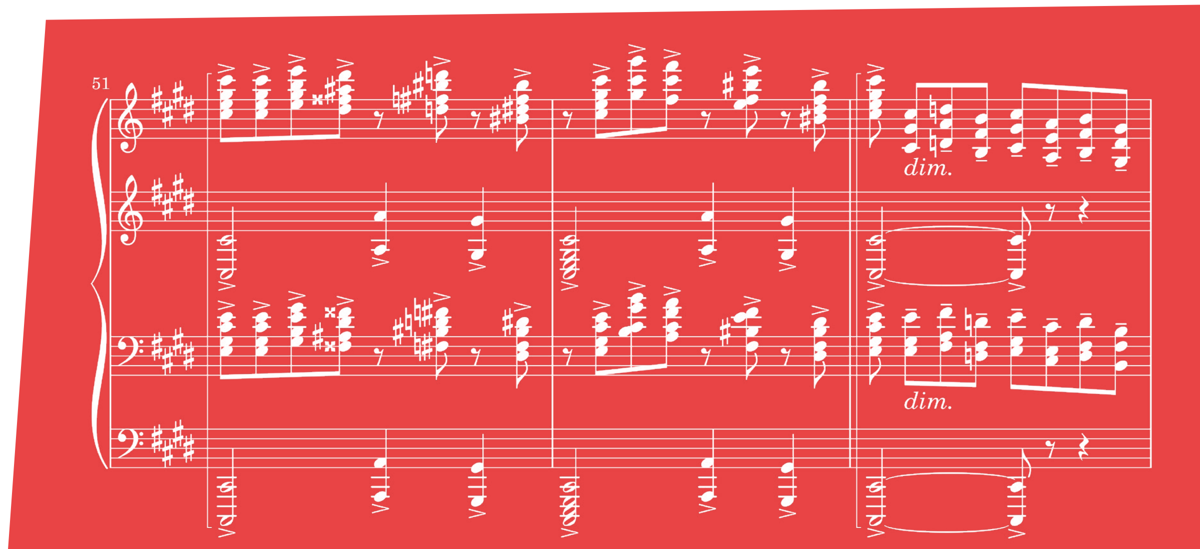
Même si ces images n'ont pas le charme de l'objet en bois, elles en ont sans doute plus que la musique générée automatiquement par un piano numérique. Et la mathématicienne est bien contente de confier à l'ordinateur des calculs qu'il serait compliqué de mener à la main pour étudier et visualiser la surface à partir de son équation.

Jusqu'ici nous n'avons donné qu'un tout petit aperçu de la collection d'objets mathématiques de l'IHP. Les objets décrits précédemment appartiennent à la famille des **variétés algébriques**, « variétés » étant un terme général qui englobe les courbes et les surfaces, « algébriques » car leur équation s'écrit au moyen seulement de puissances de x, y et z. Ce sont les surfaces algébriques que le logiciel Surfer permet de représenter. Cette famille est comme un style ou une époque de musique. On pourrait dire qu'elle est le pendant de la musique baroque, tant elle est classique au sein des familles de surfaces. Mais ce n'est qu'une famille, qu'un style parmi d'autres.

L'Ode à la joie est plutôt classée dans la musique romantique que dans la musique baroque. **La surface de Kuen** est un bel exemple de surface qui n'est pas algébrique. Une manière d'écrire son équation consiste à exprimer les « coordonnées » x, y et z d'un point sur la surface à l'aide de deux « variables » u et v, en utilisant des « fonctions trigonométriques » (classiques et hyperboliques) :

$$x = 2\cosh v \frac{\cos u + u \sin u}{u^2 + \cosh^2 v}, \quad y = 2\cosh v \frac{\sin u - u \cos u}{u^2 + \cosh^2 v}, \quad z = v - \frac{\sinh 2v}{u^2 + \cosh^2 v}.$$

Si elle ne les a pas déjà rencontrées, la mathématicienne sera bien en peine de visualiser la surface au seul vu de ces équations compliquées. Et cela même si elle a bien « fait ses gammes » en étudiant toutes sortes de fonctions lors de son éducation. C'est encore plus difficile que de se trouver face à une partition remplie d'accords et d'arpèges qu'on n'a jamais déchiffrés.



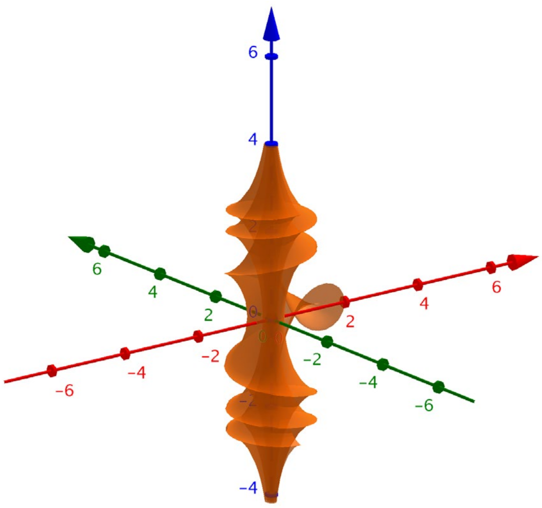
Partition du prélude op. 3 no. 2, Rachmaninoff

La surface de Kuen est infinie et a beaucoup de singularités, ce qui ne l'empêche pas d'être très belle et d'avoir une propriété mathématique remarquable concernant sa courbure, que l'on s'abstiendra de décrire ici. L'objet en bois en photo ci-dessous en représente une infime partie.

Représentation de la surface de Kuen

Collection de l'Institut Henri Poincaré © Anne Chauvet

Le logiciel libre **Geogebra** permet de s'en faire une idée.



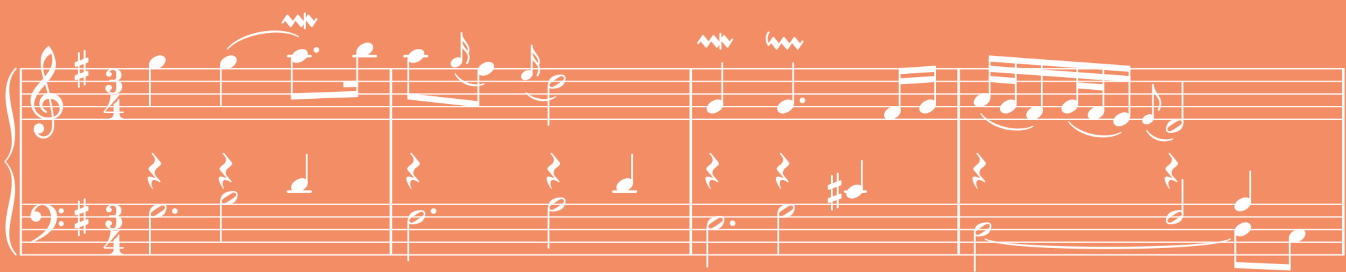
Représentation de la surface de Kuen pour u entre 0 et 6π et v entre -6 et 6

Le sculpteur **Toshimasa Kikuchi** en donne de son côté des interprétations bien plus poétiques. En particulier, ses « aiguilles » laissent imaginer l'infinitude de la surface de Kuen.

Needles installation

© Galerie Mingei | Minamoto Tadayuki

Dans la collection de l'IHP se trouvent également des objets dont l'équation semble simple et qui représentent néanmoins des surfaces compliquées, un peu comme une partition d'apparence simple peut être difficile à interpréter en raison de rythmes syncopés ou de subtilités baroques.



Extrait de la partition des Variations Goldberg – Aria, Bach

© Mutopia Project / Creative Commons Attribution-ShareAlike3.0

C'est le cas par exemple de l'objet ci-dessous, qui fait partie avec la surface de Kuen des objets ayant inspiré **Man Ray**.

Sculpture représentant la surface d'équation $w = \exp\,(1/z)$

Collection de l'Institut Henri Poincaré © Henri Duvillard

Son équation s'écrit « simplement » :

$$w = \exp\,(1/z)$$

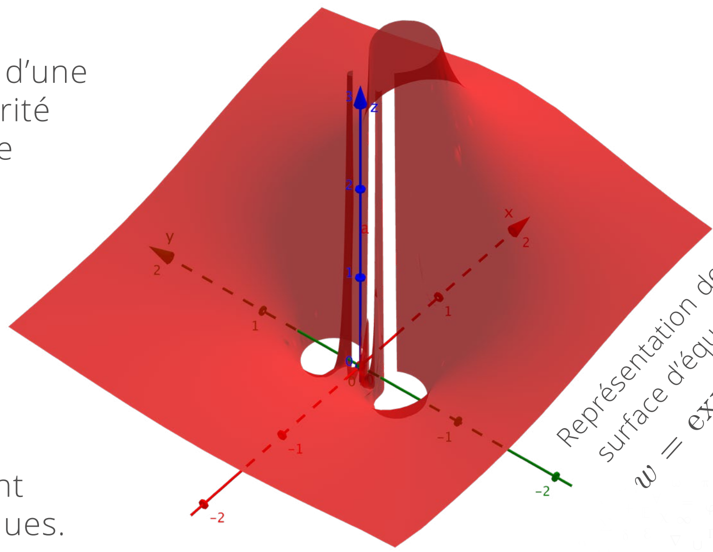
Cependant il faut entendre ici que z est une « variable complexe », de sorte que w prend également des valeurs complexes. La surface représente seulement la « partie réelle » de w, tout « nombre complexe » étant défini par deux « nombres réels », sa partie réelle et sa partie imaginaire. Si l'on veut éviter les nombres complexes on peut écrire l'équation en utilisant les coordonnées réelles x, y et z (la lettre z jouant alors son rôle de coordonnée réelle habituelle et non de variable complexe) :

$$z = \exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

C'est ainsi que l'on peut la tracer avec le logiciel Geogebra par exemple.

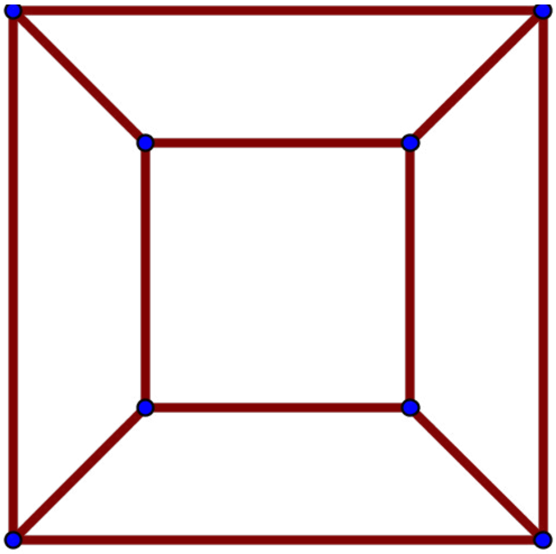
Mais c'est bien dans la théorie des fonctions d'une variable complexe que réside la particularité de cette surface. On dit qu'elle a une **singularité essentielle** en 0. Au delà de son sens mathématique précis, cette singularité est vraiment difficile à se représenter.

Cette surface appartient à la grande famille des **surfaces de Riemann**, dont l'équation est donnée par une fonction de la variable complexe z et dont l'étude est un vaste champ des mathématiques.



Représentation de la surface d'équation $w = \exp\,(1/z)$

Dimensions



Cube en perspective

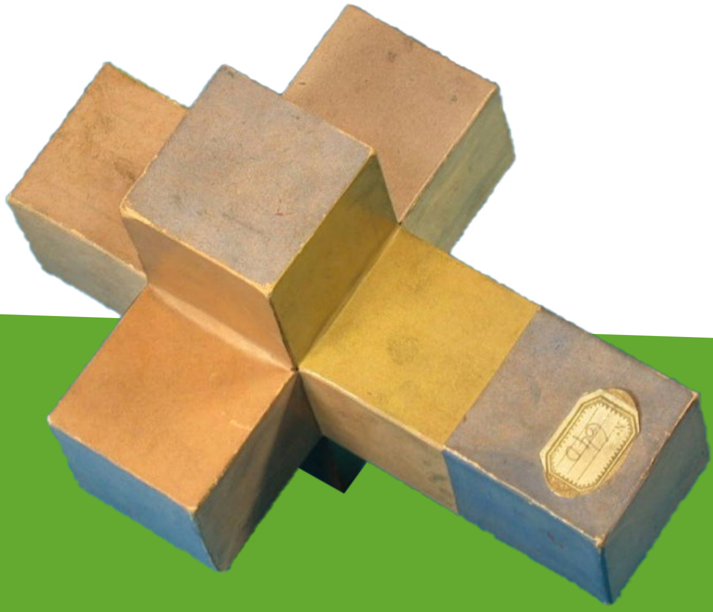
Dans notre espace physique à trois **dimensions** on ne peut représenter que des « projections » des surfaces de Riemann, qui sont des objets en dimension 4 : comme on le voit dans l'exemple ci-dessus, il nous manque une dimension pour représenter la partie imaginaire de w.

Chaque dimension supplémentaire est comme une **voix** ou un instrument qui vient enrichir la partition par de nouveaux thèmes. Si l'on se contente de certains instruments on obtient une représentation moins riche mais plus facile à appréhender. Dans la collection de l'IHP, on trouve divers autres exemples de projections dans notre espace physique d'objets mathématiques de dimension supérieure.

Parmi eux, un objet mathématiquement plus simple que ceux montrés précédemment est **l'hypercube**. En dimension 4 on l'appelle **tesseract**. De même qu'on peut dessiner un **cube** en le projetant ainsi sur le plan de la feuille, ce qui est une forme de **perspective**, on peut représenter un tesseract dans notre espace à trois dimensions. Le procédé s'appelle un **diagramme de Schlegel**.

Diagramme de Schlegel du tesseract

Collection de l'Institut Henri Poincaré © Henri Duvillard



Tesseract déplié

Une autre manière de représenter le tesseract est de le « déplier » pour en quelque sorte obtenir son **patron**, comme on apprend à le faire à l'école pour le cube.

Cet objet a inspiré nombre d'artistes, le plus célèbre d'entre eux étant certainement **Dalí**.

Transcription

Devant un tel objet, la mathématicienne ne cherchera pas à écrire une équation. L'objet parle de lui-même.

Pour des objets plus mystérieux, dont l'étiquette n'existe pas ou s'est perdue, on peut se poser la question de leur transcription en équation, comme la mélomane cherchera à « repiquer », c'est-à-dire écrire la partition d'un morceau en l'écoutant. Dans les deux cas, il s'agit d'une tâche difficile.

Concernant la musique, on pourrait imaginer automatiser le repiquage à partir d'enregistrements. Il se trouve que le mathématicien Martin Hairer, récipiendaire de prestigieux prix internationaux dont la médaille Fields, s'était fixé cet objectif dans sa jeunesse. Il avait dû renoncer devant la difficulté (comme il l'explique dans le podcast L'Oreille mathématique de l'IHP), mais ceci l'avait conduit à développer le logiciel Amadeus, encore très utilisé aujourd'hui pour l'édition d'enregistrements multipistes.

De même, percer le mystère des équations des objets mathématiques est une tâche ardue, même pour un spécialiste de ces objets comme le mathématicien François Apéry. Il le raconte dans le livre *Objets mathématiques* (chapitre 1 – La collection). La recherche d'une équation n'est pas toujours couronnée de succès, et c'est peut-être bien ainsi. Man Ray disait : « J'aime les mystères, j'aime pas les solutions beaucoup » (comme on peut l'entendre dans le film Man Ray et les équations shakespeariennes produit par l'IHP).

Pour finir

Devant une équation, la mathématicienne est un peu comme la cheffe d'orchestre devant la partition d'une **symphonie** qu'elle ne connaît pas : elle doit travailler, souvent par petites touches, avant de s'en faire une représentation. À l'inverse, pour trouver l'équation d'un objet, la mathématicienne est souvent aussi désemparée que ne le serait la musicienne pour récrire la partition de tous les instruments d'une symphonie en écoutant une interprétation.

De l'Antiquité à la Renaissance, la musique faisait partie des sciences mathématiques au même titre que la géométrie, l'arithmétique et l'astronomie. Aujourd'hui encore, on pourrait paraphraser Porphyre dans son Commentaire sur les Harmoniques de Claude Ptolémée pour dire que mathématicienne et musicienne sont « sœurs, puisqu'elles s'occupent des deux premières formes de l'être ».

Extrait de la partition de la 9ème symphonie, Beethoven

Remerciements

L'autrice remercie sa sœur mathématicienne Clotilde Fermanian Kammerer et sa sœur musicienne Youlia Coric.

Cet article est aussi disponible dans le catalogue de l'exposition *Toshimasa Kikuchi : objets mathématiques* (2021) édité et publié en bilingue par la Galerie Mingei.