M2AO, Correction TD2
Introduction aux schémas numériques

Exercice 1 *Modèle de Lorentz.*

1. Le théorème de Cauchy-lipschitz s'applique à l'équation différentielle $Y'(t) = f(Y(t))$, où la fonction $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est définie par

$$f : \begin{pmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{pmatrix} \quad \longmapsto \begin{pmatrix} -\sigma\, y_a + \sigma\, y_b \\ -y_a\, y_c + r\, y_a - y_b \\ y_a\, y_b - \beta\, y_c \end{pmatrix} \ ,$$

puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$. Cela nous assure l'unicité des solutions maximales aux problèmes de Cauchy associés.

2. Soit $\Delta t > 0$ un pas de temps. Le schéma d'Euler explicite définit une suite (v^n) d'approximations de $(Y(n\,\Delta t)$, où Y est une solution du système $Y' = f(Y)$, par $v^0 = Y(0)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t\, f(v^n) \ ,$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_a^{n+1} & = & v_a^n \ + \ \Delta t\ (-\,\sigma\, v_a^n \ + \ \sigma\, v_b^n) \\ v_b^{n+1} & = & v_b^n \ + \ \Delta t\ (-\, v_a^n\, v_c^n \ + \ r\, v_a^n \ - \ v_b^n) \\ v_c^{n+1} & = & v_c^n \ + \ \Delta t\ (v_a^n\, v_b^n \ - \ \beta\, v_c^n) \end{array} \right. .$$

Exercice 2 *Pont de Tacoma.*

1. Le système est un système du deuxième ordre en $X = \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix}$. Pour le ramener à un système du premier ordre, nous allons le récrire en termes de

$$Z \ = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \ := \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \\ y \\ y' \end{pmatrix} \ .$$

Avec ces notations, le système devient donc $Z'(t) = F(t, Z(t))$, où $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ est définie par

$$F(t, Z) \ = \begin{pmatrix} Z_2 \\ -\delta\, Z_2 \ + \ \frac{6K}{m}\ \cos Z_1\, \sin Z_1 \ + \ \lambda\, \sin(\omega\, t) \\ Z_4 \\ -\delta\, Z_4 \ - \ \frac{2K}{m}\, Z_3 \ + \ g \end{pmatrix} \ .$$

Remarque : En procédant de même, on peut récrire un système de tout ordre comme un système du premier ordre.

2. Pour appliquer le théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz, il suffit de remarquer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$. À toute condition initiale

$$\begin{pmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \\ y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

est associée une unique solution (θ, y) du système différentiel du second ordre.

Remarque : Tous les résultats (théorèmes et schémas) du cours (et des livres classiques) sont énoncés pour des systèmes du premier ordre. Ils ont évidemment des applications aux systèmes de tout ordre, mais pour les obtenir il faut commencer par récrire le système comme un système du premier ordre. Ainsi on a obtenu que pour notre système du second ordre il faut prescrire valeurs et dérivées en un point comme conditions initiales.

3. Soit $\Delta t > 0$ un pas de temps. Le schéma d'Euler explicite définit une suite (v^n) d'approximations de $(Z(n\,\Delta t)$, où Y est une solution du système $Z' = F(Y)$, par $v^0 = Z(0)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t\, F(n\Delta t, v^n) \ ,$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} v_1^{n+1} & = & v_1^n & + & \Delta t\ v_2^n & & & & \\ v_2^{n+1} & = & v_2^n & + & \Delta t\ \big(-\delta\, v_2^n & + & \frac{6K}{m}\cos v_1^n \sin v_1^n & + & \lambda \sin(\omega\, n\, \Delta t)\big) \\ v_3^{n+1} & = & v_3^n & + & \Delta t\ v_4^n & & & & \\ v_4^{n+1} & = & v_4^n & + & \Delta t\ \big(-\delta\, v_4^n & - & \frac{2K}{m}\, v_3^n & + & g\big) \end{array} \right. .$$

Exercice 3 *Un schéma d'ordre 2.*

1. *Remarque* : Avant de répondre à la question, expliquons l'origine de ce schéma. Dans le schéma d'Euler, $f(t, v(t))$, pour t compris entre t^n et $t^{n+1} = t^n + h\,t$, est approché par $f(t^n, v^n)$ (tangente à gauche) pour le schéma explicite, et par $f(t^{n+1}, v^{n+1})$ (tangente à droite) pour le schéma implicite, ce qui correspond aux méthodes d'intégration dites des rectangles (respectivement à gauche et à droite). Ici on se propose de faire la moyenne arithmétique des pentes aux points t^n et t^{n+1}. Cela devrait s'écrire :

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{h} = \frac{1}{2}\,\left(f(t^n, v^n) + f\left(t^{n+1}, v^{n+1}\right)\right)$$

et correspondrait alors à la méthode d'intégration dite des trapèzes. Pour garder un schéma explicite, on préfère remplacer dans le second membre v^{n+1} par une approximation fournie par le schéma d'Euler. Le schéma est plus compliqué et plus coûteux (par étape) que le schéma d'Euler, mais l'on espère (et l'on va montrer) qu'il est d'ordre plus élevé de sorte qu'à précision égale (petite) il nécessite moins d'étapes.

Soit u une solution de classe $\mathcal{C}^3$ et $t > 0$. Montrons que

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \ - \ \Phi(t, u(t), h) \ \overset{h \to 0}{=} \ \circ(h)$$

où

$$\Phi(t, u, h) \ = \ \frac{1}{2}\ \left(f(t, u) \ + \ f\left(t + h, u + h\, f(t, u)\right)\right) \ .$$

Or un délevoppement de Taylor donne d'une part

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} \overset{h\to 0}{=} u'(t) \;+\; \frac{h}{2}\,u''(t) \;+\; \circ(h)$$

et d'autre part

$$\Phi(t,u(t),h) \overset{h\to 0}{=} f(t,u(t)) \;+\; \frac{h}{2}\,\big[\partial_t f(t,u(t)) \;+\; u'(t)\,\partial_u f(t,u(t))\big] \;+\; \circ(h)\ ,$$

ce qui donne le résultat puisque $u'(t) = f(t,u(t))$ et

$$u''(t) \;=\; \partial_t f(t,u(t)) \;+\; u'(t)\,\partial_u f(t,u(t))\ .$$

2. Le schéma est localement stable car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, le schéma étant consistant (au moins) d'ordre deux et localement stable, il est convergent (au moins) d'ordre deux.

Exercice 4 *Stabilité asymptotique du schéma d'Euler.*

1. Puisque la fonction nulle est solution de l'équation différentielle, l'unicité des solutions aux problèmes de Cauchy (fournie par le théorème de Cauchy-Lipschitz) assure qu'une solution qui s'annule est uniformément nulle.

Or pour une fonction y qui ne s'annulle pas l'équation différentielle est équivalente à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(-\frac{1}{y}\right) \;+\; k \;=\; 0\ .$$

La solution maximale associée à la condition initiale $y(0)=1$ est donc définie par

$$y(t) \;=\; \frac{1}{1\,+\,k\,t}$$

sur $]-1/k,+\infty[$.

Cette solution admet 0 pour limite en $+\infty$.

2. Soit $h>0$ un pas de temps. On définit une suite (v^n) d'approximation de $(y(hn))$ par récurrence

$$v^0 \;=\; 1 \quad \text{et, pour } n\in\mathbf{N}\,,\quad v^{n+1} \;=\; v^n \;-\; k\,h\,(v^n)^2\ .$$

Si $k\,h\leq 1$, alors on montre par récurrence que (v^n) est décroissante et a ses valeurs comprises entre 0 et 1. Décroissante et minorée, la suite (v^n) converge. Sa limite l vérifie $l = l - khl^2$ donc $l = 0$. La suite converge vers 0

Si $k\,h>1$, alors on montre par récurrence que, pour $n\geq 1$, v^n est négatif et que la suite (v^n) est décroissante. Pour tout $n\geq 1$, on en déduit alors que $v^n \leq v^1 = -(kh-1)$ et que

$$v^n \;\leq\; [1 \;+\; k\,h(k\,h\,-1)]^{n-1}\; v^1 \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\ .$$

Remarque : L'approximation ne reproduit correctement le comportement quand $t_n = n\,h$ tend vers $+\infty$ que si h est suffisamment petit. Cela augmente évidemment le temps de calcul. Par ailleurs, naturellemment, plus les solutions sont censées varier rapidement (k grand), plus il faut mailler finement l'espace (h petit). Incidemment, on notera que dans le cas limite $k\,h=1$, le comportement à l'infini est le bon mais l'approximation stationne en 0 à partir de $n=1$!

3. On définit une suite d'approximation (y^n) par récurrence : $y^0 = 1$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, y^{n+1} est une racine de

$$X^2 \;+\; 2\left(y^n + \frac{2}{k\,h}\right) X \;+\; y^n\left(y^n \;-\; \frac{4}{k\,h}\right)$$

que l'on choisit (pour essayer d'assurer la positivité $y \geq 0$)

$$y^{n+1} \;=\; \sqrt{\frac{4}{k\,h}\left(2\,y^n \;+\; \frac{1}{k\,h}\right)} \;-\; \left(y^n \;+\; \frac{2}{k\,h}\right) \;.$$

La suite n'est définie que tant que $y^n \geq -1/(2kh)$.

Tant qu'elle est définie, la suite (y^n) est décroissante. Comme précédemment, la seule limite finie possible est 0. Par conséquent, la suite (y^n) converge vers 0 si et seulement si elle est positive ; sinon elle devrait tendre vers $-\infty$, et donc finit par ne plus être correctement définie.

Or, puisqu'une des deux racines est toujours strictement négative (tant que $y^n \geq -1/(2kh) > -2/(kh)$), la suite reste positive si et seulement si le produit des racines est négatif, d'où la condition, pour tout n,

$$y^n\left(y^n \;-\; \frac{4}{k\,h}\right) \;\leq\; 0\;.$$

Ainsi si $k\,h \geq 4$, alors, puisque (y^n) est décroissante, on a, pour tout n, $y^n \leq 4/(kh)$, et l'on montre par récurrence que la suite (y^n) reste positive. La suite est donc bien définie et converge vers 0.

Si $k\,h > 4$, alors $y^0(y^0 - 4/(kh)) > 0$ et y^1 est strictement négatif. La suite n'est pas définie pour tout n.

Remarque : Remarquons que la condition $k\,h \leq 4$ est moins restrictive que la condition de la question précédente. Par ailleurs, l'algorithme étant implicite, il est normal qu'il puisse ne pas se poursuivre par défaut d'inversibilité.

Montrons maintenant que le schéma est consistant (au moins) d'ordre 2. Soit y une solution de classe $\mathcal{C}^3$ de l'équation différentielle et $t > 0$. Il nous faut montrer que

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} \;+\; k\left(\frac{y(t+h)+y(t)}{2}\right)^2 \;\overset{h\to 0}{=}\; \mathcal{O}(h^2)\;.$$

Or un développement de Taylor donne

$$\left(\frac{y(t+h)+y(t)}{2}\right)^2 \;\overset{h\to 0}{=}\; y^2(t) \;+\; y(t)\,y'(t)\,h \;+\; \mathcal{O}(h^2)$$

et

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} \;\overset{h\to 0}{=}\; y'(t) \;+\; \frac{1}{2}\,y''(t)\,h \;+\; \mathcal{O}(h^2)\;.$$

Le schéma est bien au moins d'ordre deux puisque $y'(t) = -ky^2(t)$ et $y''(t) = -2ky(t)y'(t)$.

Exercice 5 *Schéma de Taylor*

1. Soit u une solution régulière de l'équation. Par définition, on a bien $u'(t) = f(t,u(t)) = f^{[0]}(t,u(t))$ pour tout t.

Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $u^{[m+1]}(t) = f^{[m]}(t,u(t))$ pour tout t. Alors, en dérivant cet égalité, on obtient, pour tout t,

$$\begin{aligned} u^{[m+2]}(t) &= \partial_t f^{[m]}(t,u(t)) \ + \ \partial_u f^{[m]}(t,u)\, u'(t) \\ &= \partial_t f^{[m]}(t,u(t)) \ + \ \partial_u f^{[m]}(t,u)\, f(t,u(t)) \\ &= f^{[m+2]}(t,u(t)) \ . \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration par récurrence.

2. Soit u une solution régulière de l'équation et $t > 0$. D'après la question précedente, les développements asymptotiques en $h \to 0$ de

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

et $\psi_p(t,u(t),h)$ coïncident jusqu'à l'ordre $p-1$. Le schéma est donc consistant (au moins) d'ordre p.

3. Il suffit de remarquer que ψ_p est de classe $\mathcal{C}^1$. Le schéma est donc convergent d'ordre (au moins) p.

Remarque : Pour $p = 1$, on retrouve le schéma d'Euler explicite. D'autre part, ce schéma permet d'obtenir un ordre arbitrairement élevé, mais en pratique il est peu exploitable pour $p \geqslant 2$. En effet, il suppose a priori une forte régularité sur f et nécessite la détermination des $f^{[m]}$ (au moins en certains points) qui s'avère d'un coût prohibitif. L'algorithme a donc avant tout un intérêt théorique (sauf pour $p = 1$ évidemment) : montrer qu'il existe des schémas de tout ordre.