M2AO, Correction TD3
Schémas implicites, schémas de Runge-Kutta

Exercice 1 *Stabilité asymptotique et schémas implicites.*

1. La solution générale de l'équation différentielle est donnée par

$$u(t) \; = \; \lambda\, e^{-150t} \; + \; \frac{1}{5}$$

où λ est une constante arbitraire. La condition initiale fixe $\lambda = 4/5$.

2. Soit $h > 0$ un pas de temps. On définit une suite (v^n) d'approximation de $(u(hn))$ par récurrence

$$v^0 \; = \; 1 \quad \text{et, pour } n \in \mathbf{N}\,, \quad v^{n+1} \; = \; v^n \; + \; h\,(-150\,v^n \; + \; 30)\ .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$v^{n+1} \; - \; \frac{1}{5} \; = \; (1 \; - \; 150\,h)\, \left(v^n \; - \; \frac{1}{5}\right)\ .$$

D'où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v^n \; = \; \frac{1}{5} \; + \; \frac{4}{5}\; (1 \; - \; 150\,h)^n\ .$$

Remarque : Pour simplifier la relation de récurrence, on a soustrait 1/5 de manière à profiter du fait que la constante 1/5 est une solution du schéma. En général, une solution de l'équation différentielle ne fournit pas une solution du schéma, mais une solution approchée quand $h \to 0$: c'est ce que l'on appelle la consistance du schéma. En revanche, lorsque le schéma est au moins d'ordre p, une solution polynomiale de degré inférieur à p (si elle existe) fournit bien une solution du schéma, c'est une conséquence du fait que le développement de Taylor à l'ordre p soit exact pour de telles fonctions. Ceci s'applique évidemment toujours aux solutions constantes.

Pour $h = 1/50$, on a $|v^n| \to \infty$ quand $n \to \infty$, ce qui se produit plus généralement dès que $150\,h > 1$. Si $150\,h \leq 1$, alors $v^n \to 1/5$ quand $n \to \infty$, ce qui est le comportement souhaité.

3. Soit $h > 0$ un pas de temps. On définit une suite (v^n) d'approximation de $(u(hn))$ par récurrence

$$v^0 \; = \; 1 \quad \text{et, pour } n \in \mathbf{N}\,, \quad v^{n+1} \; = \; v^n \; + \; h\,\left(-150\,v^{n+1} \; + \; 30\right)\ .$$

Remarque : Ici le schéma implicite est défini pour tout pas de temps (puisque l'on a toujours $h \neq -1/150$), mais en général pour que la fonction à inverser soit inversible l'on peut être amené à restreindre l'ensemble des pas de temps admissibles.

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$(1 \; + \; 150\,h)\, \left(v^{n+1} \; - \; \frac{1}{5}\right) \; = \; v^n \; - \; \frac{1}{5}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$v^n \;=\; \frac{1}{5} \;+\; \frac{4}{5}\;(1\,+\,150\,h)^{-n} \;\;.$$
Et l'on a toujours le comportement désiré.

Exercice 2 *Problème raide et schéma implicite.*

1. Une solution de l'équation est une fonction u définie par
$$u(t) \;=\; \mu\, e^{-\lambda t} \;+\; t \;,$$
où μ est une constante arbitraire. À t fixé, on a alors $u(t) \to t$ quand $\lambda \to \infty$.

2. Soit $h > 0$ un pas de temps. On définit une suite (v^n) d'approximation de $(u(hn))$ par récurrence
$$v^0 \;=\; u(0) \quad \text{et, pour } n \in \mathbf{N}\,, \quad v^{n+1} \;=\; v^n \;+\; h\;(-\lambda\, v^n \;+\; 1 \;+\; \lambda\, n\, h) \;\;.$$
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$v^{n+1} \;-\; (n+1)\,h \;=\; (1\;-\;150\,h\lambda)\;\,(v^n \;-\; n\,h) \;\;.$$
D'où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$v^n \;=\; n\,h \;+\; u(0)\;\,(1\;-\;\lambda\,h)^n \;\;.$$
Remarque : Ici on profite du fait que notre solution $u(t) = t$, polynomiale de degré 1, fournit une solution du schéma $v^n = n\,h$.

À h et n fixé, on a donc $(-1)^n\, v^n \to \infty$ quand $\lambda \to \infty$.

Remarque : On souhaiterait avoir $v^n \to n\,h$. Pour le problème originel, plus λ est grand, plus vite la contribution des termes en λ devient négligeable. Ce n'est pas le cas pour le problème approché considéré ici, et l'on peut même montrer que le comportement lorsque $n \to \infty$ n'est le bon que si $h\,\lambda < 1$. Alors que les variations significatives sont lentes, il nous faut donc tout de même avoir un pas de temps très petit. Cette situation est typique pour les schémas explicites lorsque l'on considère un problème raide, c'est-à-dire un problème impliquant des variations rapides peu significatives et des variations lentes donnant le comportement principal.

3. Soit $h > 0$ un pas de temps. On définit une suite (v^n) d'approximation de $(u(hn))$ par récurrence
$$v^0 \;=\; u(0) \quad \text{et, pour } n \in \mathbf{N}\,, \quad v^{n+1} \;=\; v^n \;+\; h\;\big(-\lambda\, v^{n+1} \;+\; 1 \;+\; \lambda\,(n+1)\,h\big) \;\;.$$
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$v^{n+1} \;-\; (n+1)\,h \;=\; (1\;+\;150\,h\lambda)\;\,(v^n \;-\; n\,h) \;\;.$$
D'où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$v^n \;=\; n\,h \;+\; u(0)\;\,(1\;+\;\lambda\,h)^{-n} \;\;.$$
À h et n fixé, on a donc $v^n \to n\,h$ quand $\lambda \to \infty$, ce qui est le comportement souhaité.

Exercice 3 *Schémas de Runge-Kutta à deux points intermédiaires.*

1. On définit

$$\phi(t,u,h) \;=\; b_1\, f\,(t + c_1\, h, u) \;+\; b_2\, f(t + c_2\, h, u + h\, f(t + c_1\, h, u))\;.$$

La fonction ϕ est continue et pour assurer la consistance, on doit avoir $\phi(t,u,0) = f(t,u)$. La consistance est équivalente à $b_1 + b_2 = 1$.

2. Soit u une solution de classe $\mathcal{C}^1$. Un développement limité à l'ordre 1 de

$$b_1\, f\,(t + c_1\, h, u(t)) \;+\; b_2\, f(t + c_2\, h, u(t) + h\, a\, f(t + c_1\, h, u(t)))$$

donne quand $h \to 0$

$$(b_1 \,+\, b_2)\, f(t,u(t)) \;+\; h\,(b_1\, c_1 \,+\, b_2\, c_2)\, \partial_t f(t,u(t)) \;+\; h\, b_2\, a\, f(t,u(t))\, \partial_u f(t,u(t)) \;+\; \mathcal{O}(h)\;.$$

Le schéma est au moins d'ordre 2 si et seulement si

$$b_1 \,+\, b_2 \;=\; 1\;, \quad b_1\, c_1 \,+\, b_2\, c_2 \;=\; \frac{1}{2} \;\text{ et }\; b_2\, a \;=\; \frac{1}{2}\;.$$

3. Le schéma d'Euler modifié correspond au schéma précédent pour $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$, $a = 1/2$. Il est donc au moins d'ordre 2.