Math I Analyse en séquences 3 et 5

Corrigé détaillé du premier contrôle continu.

Questions de cours (3 points).

- La formule du binôme est
$$(y+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j},$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, où les coefficients du binôme sont définis par :
$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$
- L'axiome fondamental dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$ est celui de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ; cette borne supérieure est unique et c'est par définition *le* plus petit (élément de l'ensemble) des majorants de A.
- Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, quels que soient x, $y \in A$, le segment d'extrémités x et y est inclus dans A. Si $x \leq y$ le segment d'extrémités x et y est l'intervalle fermé $[x, y]$, ensemble des réels z tels que $x \leq z \leq y$. Noter qu'indépendamment de la position de x par rapport à y, on peut toujours écrire
$$[x,y] = \{z = \theta x + (1-\theta)y\,;\ \theta \in [0,1]\}.$$

Exercice (3 points).

Première variante Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité $x^3 > x$ équivaut à $x(x^2-1) > 0$, ce qui (par un tableau de signe) donne ($x > 0$ et $x^2 > 1$) ou ($x < 0$ et $x^2 < 1$), c'est-à-dire encore $x > 1$ ou $-1 < x < 0$. Par suite, l'ensemble A des nombres réels x tels que $x^3 > x$ est égal à $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$. Les minorants de A sont les réels inférieurs ou égaux à -1, c'est-à-dire les éléments de $]-\infty, 1]$. Le plus grand d'entre eux est -1 : c'est la borne inférieure de A. L'ensemble A n'est pas majoré, donc l'ensemble de ses majorants est vide et A n'a pas de borne supérieure. L'ensemble A n'est pas un intervalle car $1/2 \in [-1/2, 2]$, $-1/2 \in A$, $2 \in A$ mais $1/2 \notin A$.

Seconde variante Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité $x^4 > x$ équivaut à $x(x^3-1) > 0$, ce qui (par un tableau de signe) donne ($x > 0$ et $x^3 > 1$) ou ($x < 0$ et $x^3 < 1$), c'est-à-dire encore $x > 1$ ou $x < 0$. Par suite, l'ensemble A des nombres réels x tels que $x^4 > x$ est égal à $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. L'ensemble A n'est pas minoré, donc l'ensemble de ses minorants est vide et A n'a pas de borne inférieure. L'ensemble A n'est pas majoré, donc l'ensemble de ses majorants est vide et A n'a pas de borne supérieure. L'ensemble A n'est pas un intervalle car $1/2 \in [-1/2, 2]$, $-1/2 \in A$, $2 \in A$ mais $1/2 \notin A$.

Questionnaire à choix multiples (9 points).

Question 1. Le sous-ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x > 0 \text{ et } 2x^2 > 1\}$ de $\mathbb{R}$ admet

- tous les réels négatifs ou nuls , et plus généralement, tous les éléments de l'intervalle $]-\infty, 1/\sqrt{2}]$ comme minorants (si $x \leq 0$ alors $x \notin A$ et si $0 < x \leq 1/\sqrt{2}$ alors $x^2 \leq 1/2$ et donc $x \notin A$ non plus ; ceci montre que tous les éléments de A sont strictement supérieurs à $1/\sqrt{2}$ et sont donc aussi strictement supérieurs à tous les éléments de $]-\infty, 1/\sqrt{2}]$),
- une borne inférieure en tant que partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, cette borne inférieure valant en l'occurrence $1/\sqrt{2}$ puisqu'en fait $A =]1/\sqrt{2}, +\infty[$.

En revanche, A n'admet pas :

- de plus petit élément car sa borne inférieure ne lui appartient pas,
- de majorant ni a fortiori de borne supérieure.

Question 2. Le sous-ensemble $B = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ r > 0 \text{ et } 2r^2 > 1\}$ de $\mathbb{Q}$ admet

- tous les nombres *rationnels* inférieurs à $1/\sqrt{2}$ comme minorants (dans $\mathbb{Q}$).

En revanche, B n'admet pas :

- de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$, car le plus grand de ses minorants dans $\mathbb{R}$ est le nombre irrationnel $1/\sqrt{2}$, et il existe des nombres rationnels inférieurs à $1/\sqrt{2}$ arbitrairement proches de $1/\sqrt{2}$.
- de majorant ni a fortiori de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, car il contient notamment $\mathbb{N}^*$ qui n'est pas majoré.

Noter que $B =]1/\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$.

Question 3. Soit $a = (1-\sqrt{5})/2$. On remarque que

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{1-5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

mais ce calcul n'est pas indispensable. Par les inégalités (grossières) $2 < \sqrt{5} < 3$, on obtient

$$-2 < \frac{1}{a} < -1\,,$$

ce qui implique

$$E(\frac{1}{a}) = -2 \quad \text{et non } -1\,,$$

tandis que

$$E(\frac{1}{|a|}) = 1\,,$$

et les deux inégalités suivantes sont vraies :

$$\frac{1}{|a|} < 2\,, \quad \frac{1}{|a|} \leq 2$$

(« qui peut le plus peut le moins » : si une inégalité stricte est vraie alors l'inégalité large est vraie, la réciproque étant évidemment fausse).

Question 4. Les égalités suivantes sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{x^6} = x^2\,, \quad \sqrt[3]{(x^2+1)^3} = x^2+1\,,$$

car $x^2 \geq 0$ et $x^2+1 > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. En revanche, $\sqrt{x^6} \neq x^3$ pour $x < 0$, de même que $\sqrt{(x^2-1)^2} \neq x^2-1$ pour $x \in]-1,1[$, car les racines sont des nombres positifs par définition. Enfin on a $\sqrt{(x^2+1)^3} \neq \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ si $x \neq 0$: l'égalité est grossièrement fausse car en élevant les deux membres à la puissance 6 on obtient d'un côté $(x^2+1)^9$ et de l'autre $(x^2+1)^4$.

Question 5. Pour $x \in [-1,2]$ et $y \in [5,8]$ on a

$$0 < -1+5 = 4 \leq x+y \leq 2+8 = 10\,,$$

$$-1-8 = -9 \leq x-y \leq 2-5 = -3\,,$$

ou encore

$$0 < 3 \leq y-x \leq 9\,,$$

et donc :

$$y-x = |y-x| \geq 3\,, \quad \frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{10}\,, \quad x+y = |x+y| \leq 10\,,$$

tandis que par exemple pour $x_0 = -1 \in [-1,2]$ et $y_0 = 8 \in [5,8]$,

$$|y-x| = 9 > 6\,, \quad \frac{1}{x-y} = -\frac{1}{9} > -\frac{1}{3}\,.$$

Question 6. Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $x^2 \leq |x|$ et donc a fortiori (en divisant par un nombre supérieur à 1) :

$$\frac{x^2}{x^2+1} \leq |x|$$

Ceci montre en particulier que l'inégalité $\dfrac{x^2}{x^2+1} > |x|$ est fausse pour tout $x \in [-1,1]$, et que l'inégalité $\dfrac{x^2}{x^2+1} > x$ est fausse pour tout $x \in [0,1]$ (qui est un sous-ensemble de $[-1,1]$). Par ailleurs, l'inégalité $\dfrac{x^2}{x^2+1} \leq x$ est grossièrement fausse pour les $x \in [-1,0[$ (qui est un sous-ensemble de $[-1,1]$). En revanche, l'inégalité $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geq \dfrac{|x|^3}{2x^2+1}$ est vraie pour tout $x \in [-1,1]$ car $x^2 \geq |x|^3$ et $x^2+1 \leq 2x^2+1$.