Math I Analyse

licence STS portail Mathématiques-Informatique

Université Claude Bernard Lyon 1

Sylvie Benzoni

26 octobre 2010

Programme et objectifs

MOTS-CLÉ DU COURS

Chapitre 1 : Nombres réels, bornes supérieures et inférieures, intervalles.
Chapitre 2 : Suites numériques. Théorème de Bolzano-Weierstrass.
Chapitre 3 : Fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (limite, continuité, dérivabilité). Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
Chapitre 4 : Équations différentielles : équations linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 à coefficients constants.

Les objectifs visés sont les suivants.
Compétences de nature méthodologique et/ou conceptuelle :
- Comprendre les propriétés fondamentales de l'ensemble des réels, du point de vue algébrique (l'*algèbre* s'intéressant aux *structures*), et surtout analytique (avec l'axiome fondamental de l'analyse aussi appelé *principe de la borne supérieure*).
- Savoir faire des calculs abstraits, notamment avec le signe Σ (sommes simples ou doubles, changements d'indices, formule du binôme).
- Savoir faire des *démonstrations* par récurrence, par l'absurde, etc.
- Savoir faire des *démonstrations* avec des epsilon (ε) : suite convergente ; limite, continuité, dérivabilité d'une fonction, *critère de Cauchy* pour les suites et les fonctions.
- Maîtriser les notions de *suite extraite*, *fonction*, *injection, surjection, bijection*, *continuité*.
- Concevoir les équations différentielles comme modèles mathématiques (incontournables dans certains domaines de la physique, la chimie, la biologie, etc.) et faire le lien avec les suites (modèles dits *discrets*).

Compétences techniques :
- Manipulation d'*inégalités* dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire *majorer* et *minorer*, avec des *valeurs absolues*, des *parties entières*, des *puissances entières*, des *racines n-ièmes*.
- Calculs de *limites* (élémentaires) de suites et de fonctions.
- Calcul du terme général d'une suite définie par une relation de *récurrence linéaire* simple ou double.
- Exploitation de *tableaux de variations* pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tracé de *graphes* à main levée.
- Calcul des *solutions des équations différentielles* linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 à coefficients constants.

D'autres objectifs non spécifiques à cette UE sont :

- entraînement à la prise de notes (dont l'existence de ce poly ne dispense pas) ;
- développement de la capacité d'*abstraction* ;
- entraînement à la résolution d'exercices, ce qui suppose assiduité et participation active aux TD.

CONTRÔLE DES CONNAISSANCES

Les évaluations ont lieu sur le mode du **contrôle continu intégral** (CCI), et portent aussi bien sur vos aptitudes techniques que sur votre connaissance des concepts et vos capacités de raisonnement. L'absence à une épreuve donne lieu à la note 0, sauf cas exceptionnel sur justificatif. L'absence à toutes les épreuves donne lieu à la mention DEF (pour « défaillant ») au contrôle continu, ce qui implique l'impossibilité de valider l'UE (et le semestre 1 de la licence STS dans le portail Mathématiques-Informatique).

Table des matières

Chapitre I

Les réels

1 Introduction aux nombres réels

En apprenant à compter, on apprend à manipuler des nombres de plus en plus compliqués.

Au début, on travaille exclusivement avec des nombres entiers dits « naturels » , dont l'ensemble est noté $\mathbb{N}$. Pour calculer dans $\mathbb{N}$ il faut connaître ses tables d'addition (l'opération d'addition étant notée $+$) et de multiplication (l'opération de multiplication étant notée $\times$ ou ... rien du tout s'il n'y a pas d'ambiguïté), tables sur lesquelles on ne reviendra pas ici. Il faut également connaître quelques règles de nature algébrique, souvent appliquées sans y penser :

- **règles de calcul**
  (A1) quels que soient les nombres a et b, on a $a + b = b + a$ et $ab = ba$
  (*commutativité* de $+$ et $\times$) ;
  (A2) quels que soient les nombres a, b et c, on a $(a+b)+c = a+(b+c)$ et $a(bc) = (ab)c$
  (*associativité* de $+$ et $\times$) ;
  (A3) quels que soient les nombres a, b et c, on a $(a + b)c = ac + bc$
  (*distributivité* de $\times$ sur $+$) ;
  (A4) quel que soit le nombre a, on a $a + 0 = a$ et $a \times 1 = a$
  (*éléments neutres* pour $+$ et $\times$) ;
- **règles de comparaison**
  (O1) quel que soit le nombre a, on a $a \leq a$
  (*réflexivité de* $\leq$) ;
  (O2) quels que soient les nombres a et b, si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$
  (*anti-symétrie de* $\leq$) ;
  (O3) quels que soient les nombres a, b et c, si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$
  (*transitivité* de $\leq$) ;
  (O4) quels que soient les nombres a et b, $a \leq b$ ou $b \leq a$,
- **règles de compatibilité**
  (AO) quels que soient les nombres a, b et c,

$$a \leq b \qquad \text{implique} \qquad a + c \leq b + c\,,$$

$$(a \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq c) \qquad \text{implique} \qquad ac \leq bc\,.$$

Les termes en italique ci-dessus seront appris en algèbre. Les propriétés (O1) à (O3) expriment que $\leq$ (qui se lit a inférieur ou égal à) est une *relation d'ordre* ; la propriété (O4) exprime que cette relation d'ordre est *totale*.

Autres relations : À partir de la relation $\leq$ on définit la relation symétrique $\geq$ (supérieur ou égal à) par :

$$a \geq b \qquad \text{si et seulement si} \qquad b \leq a\,,$$

(et $\geq$ est une relation d'ordre totale dès que $\leq$ en est une). On définit aussi $<$ (strictement inférieur à) par

$$a < b \qquad \text{si et seulement si} \qquad (a \leq b \quad \text{et} \quad a \neq b)\,,$$

et $>$ (strictement supérieur à) par

$$a > b \qquad \text{si et seulement si} \qquad (a \geq b \quad \text{et} \quad a \neq b)\,.$$

(Peut-on qualifier $<$ ou $>$ de relation d'ordre ?)

Remarque I.1 La deuxième ligne de (AO) peut aussi s'écrire à l'aide de la relation stricte $<$, en utilisant le fait que $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$ (on dit qu'il n'y a pas de *diviseur de zéro* dans $\mathbb{N}$), de la façon suivante :

$$(a < b \quad \text{et} \quad 0 < c) \qquad \text{implique} \qquad ac < bc\,.$$

L'introduction des nombres négatifs conduit à l'ensemble des nombres entiers dits « relatifs » , noté $\mathbb{Z}$, dans lequel on dispose de la notion de nombres opposés : deux nombres a et b sont dit *opposés* si $a + b = 0$. Enfin, dans l'ensemble des fractions, ou nombres *rationnels*,

$$\mathbb{Q} = \{\, r = p/q\,;\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\,\}\,,$$

on dispose de la notion de nombres inverses : deux nombres r et s sont dit *inverses* l'un de l'autre si $rs = 1$.

Bien entendu les règles de calcul (A1) à (A4) et de comparaison (O1) à (O4), plus (AO), restent vraies pour les nombres *rationnels*. Les notions d'opposés et d'inverses s'expriment dans la règle supplémentaire :

(A5) quel que soit le nombre a, il existe un unique nombre b tel que $a + b = 0$ et l'on note $b = -a$; si de plus a est différent de 0, il existe un unique nombre c tel que $ac = 1$ et l'on note $c = a^{-1}$ ou $c = 1/a$.

Un ensemble de nombres vérifiant les propriétés (A1) à (A5), ce qui est en particulier le case de $\mathbb{Q}$, est appelé *corps commutatif* (cette notion n'est pas à proprement parler au programme de cette UE ; elle sera vue en algèbre).

L'introduction des nombres dits « réels » peut être motivée de multiples façons. La plus élémentaire consiste à remarquer que l'on ne sait pas tout « mesurer » avec des nombres rationnels.

Par exemple, la diagonale d'un carré de longueur 1 (dans l'unité de votre choix) doit avoir, d'après le théorème de Pythagore, une longueur ℓ telle que $\ell^2 = 2$. Or on peut montrer assez facilement, grâce à un *raisonnement par l'absurde*, qu'il n'existe pas de tel ℓ dans l'ensemble des rationnels. En effet, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, tels que $(p/q)^2 = 2$. On peut supposer sans perte de généralité que p et q sont strictement positifs (sinon on les remplacerait par leur opposé, ce qui ne changerait pas la valeur de $(p/q)^2$; de plus p ne peut pas être nul puisque $0^2 = 0 \neq 2$), et que p et q ne sont pas tous les deux pairs (sinon on simplifierait la fraction p/q). Alors $p^2 = 2q^2$ est pair, donc p est pair (le carré d'un nombre impair étant toujours impair) : en écrivant $p = 2m$, on en déduit $2m^2 = q^2$, et donc q doit être pair aussi, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Un autre problème classique de mesurage concerne le périmètre d'un cercle de rayon 1 : comme pour la diagonale du carré on peut démontrer, mais c'est plus difficile, que ce périmètre (2π, par définition de π) n'est pas un rationnel.

Intuitivement les nombres réels comblent les « trous » dans l'ensemble des rationnels, et l'on peut représenter l'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, par une droite infinie. L'ensemble $\mathbb{R}$ a toutes les propriétés algébriques de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire (A1) à (A5), (O1) à (O4), et (AO) : $\mathbb{R}$ est un corps commutatif muni d'une relation d'ordre totale, comme $\mathbb{Q}$. Mais quel est l'avantage de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$? Pourquoi l'analyse mathématique est-elle fondée sur $\mathbb{R}$ plutôt que $\mathbb{Q}$? La réponse réside dans la notion de borne supérieure...

2 Bornes supérieures

On se place dans ce paragraphe dans un ensemble quelconque, mais non vide, $\mathbb{X}$ (on peut penser par exemple à $\mathbb{Q}$), muni d'une relation d'ordre totale $\leq$.

Définition I.1 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{X}$ (ce qui s'écrit en symboles mathématiques $A \subset \mathbb{X}$ et $A \neq \emptyset$). On dit que*

- *la partie A admet un* **majorant** *(on dit aussi A est* **majorée***) s'il existe $x \in \mathbb{X}$ (appelé* **majorant***) tel que pour tout $a \in A$, $a \leq x$;*
- *la partie A admet un* **élément maximal** *s'il existe $b \in A$ (appelé élément maximal) tel que pour tout $a \in A$, $a \leq b$;*
- *la partie A admet une* **borne supérieure** *s'il existe $b \in \mathbb{X}$ (appelé borne supérieure) tel que pour tout $a \in A$, $a \leq b$ et pour tout x majorant A, on a $b \leq x$; l'élément b est appelé borne supérieure de A.*

Autrement dit, *un élément maximal de A est un majorant de A qui appartient à A*. S'il existe, il est unique (ceci découle immédiatement de la propriété (O2)), et on le note $\max A$: c'est *le* plus grand élément de A. De façon analogue, on dit que

- la partie A admet un **minorant** s'il existe $x \in \mathbb{X}$ tel que pour tout $a \in A$, $x \leq a$;
- la partie A admet un **élément minimal** s'il existe $b \in A$ tel que pour tout $a \in A$, $b \leq a$;
- la partie A admet une **borne inférieure** s'il existe $b \in \mathbb{X}$ tel que pour tout $a \in A$, $b \leq a$ et pour tout x minorant A, on a $x \leq b$.

Un élément minimal de A, lorsqu'il existe, est unique et noté $\min A$: c'est *le* plus petit élément de A.

De plus, on voit que l'existence d'une borne supérieure pour A revient à demander que l'ensemble des majorants de A ait un élément minimal ; s'il existe, cet élément minimal est unique et c'est l'unique borne supérieure de A, alors notée $\sup A$. De la même façon, si elle existe, la borne inférieure de A est l'élément maximal de l'ensemble des minorants de A ; elle est noté $\inf A$.

Proposition I.1 *Toute partie finie non vide de $\mathbb{X}$ a un élément maximal et un élément minimal.*

Dém. On peut raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments. Si $A \subset \mathbb{X}$ a un élément : c'est un singleton $\{a\}$, pour lequel a est évidemment un élément minimal et un élément maximal. Pour faire fonctionner la récurrence, on aura également besoin du cas à deux éléments : pour $A = \{a, b\} \subset \mathbb{X}$, on a soit $a \leq b$, auquel cas $a = \min A$ et $b = \max A$, soit $b < a$, auquel cas $b = \min A$ et $a = \max A$. (On note souvent $\min(a, b)$ au lieu de $\min\{a, b\}$, et $\max(a, b)$ au lieu de $\max\{a, b\}$.) Faisons maintenant l'hypothèse de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$:

(H_n) toutes les parties de $\mathbb{X}$ à au plus n éléments ont un élément minimal et un élément maximal.

Soit A une partie de $\mathbb{X}$ à $(n + 1)$ éléments. Choisissons $a \in A$. Alors $B := A \backslash \{a\}$ a n éléments, et admet donc un élément minimal b et un élément maximal c d'après (H_n). On vérifie sans peine que $b' := \min(a, b)$ est un élément minimal de A et $c' := \max(a, c)$ est un élément maximal de A. Ceci montre que (H_{n+1}) est vraie. □

Par ailleurs, on a les implications suivantes, qui ne méritent pas d'autre preuve que de reformuler les définitions :

Il existe un élément maximal ⇒ il existe une borne supérieure ⇒ il existe un majorant.

Plus précisément, si b est un élément maximal de A, alors c'est un majorant de A, et c'est le plus petit des majorants, c'est-à-dire la borne supérieure de A. Bien entendu, les implications réciproques sont fausses. Considérons par exemple l'ensemble

$$A = \{ r \in \mathbb{Q} ; \; r^2 < 4\} .$$

Il admet 2 comme borne supérieure (à titre d'exercice on pourra démontrer cette affirmation, en utilisant (AO)), mais puisque cette borne supérieure ne lui appartient pas, il n'admet pas d'élément maximal. Considérons ensuite l'ensemble

$$A = \{ r \in \mathbb{Q} ; \; r^2 < 2\}$$

Le nombre 2 est un majorant évident de A : tous les nombres supérieurs à 2 sont de carré supérieur à 4 (grâce à (AO)) et ne peuvent donc pas appartenir à A. Mais on peut montrer que A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ ... En revanche, A a une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ (c'est le nombre réel habituellement noté $\sqrt{2}$). Ceci résulte de l'axiome qui différencie précisément $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, sur lequel on reviendra dans le prochain paragraphe.

Dans l'immédiat, revenons à la définition des bornes supérieure et inférieure, et donnons-en une caractérisation fort utile en pratique. Au passage, nous allons rencontrer pour la première fois (dans ce cours) un énoncé en terme de « ε » .

Proposition I.2 *Supposons que* $\mathbb{X}$ *soit un corps commutatif muni d'une relation d'ordre totale, de sorte que les propriétés* (A1) *à* (A5), (O1) *à* (O4), *et* (AO) *soient satisfaites*[1]. *Soit* $A \subset \mathbb{X}$, *avec* $A \neq \emptyset$. *Alors* A *admet* $x \in \mathbb{X}$ *comme borne supérieure si et seulement si,* x est un majorant de A et *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$, *il existe* $a \in A$ *tel que*

$$x - \varepsilon < a \leq x .$$

De façon analogue, A *admet* $y \in \mathbb{X}$ *comme borne inférieure si et seulement si,* x est un minorant de A et *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$, *il existe* $b \in A$ *tel que*

$$y \leq b < y + \varepsilon .$$

Dém. Il suffit de démontrer le résultat pour la borne supérieure, le cas de la borne inférieure s'en déduisant en changeant A en $-A = \{ b \in \mathbb{X} ;\ -b \in A \}$.

Si $x = \sup A$, alors par définition x est un majorant de A, et donc pour tout $a \in A$, $a \leq x$. C'est l'inégalité avec ε qui demande une petite démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{X}$, $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour tout $a \in A$, $a \leq x - \varepsilon_0$: alors $x - \varepsilon_0 \in \mathbb{X}$ est un majorant de A strictement inférieur à x, ce qui contredit le fait que $x = \sup A$.

Réciproquement, supposons que x est un majorant de A et que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que

$$x - \varepsilon < a \leq x .$$

Alors x est un majorant de A (!), et il n'en existe pas de plus petit : en effet, puisque pour tout $y < x$ on peut écrire $y = x - (x - y)$, en appliquant l'hypothèse à $\varepsilon = x - y$ on trouve un élément a de A tel que $y < a$, ce qui montre que y ne majore pas A. □

(Dans la démonstration ci-dessus nous avons utilisé implicitement un certain nombre de propriétés contenues dans (A1) à (A5), (O1) à (O4), et (AO) : un bon exercice consisterait à repérer lesquelles et à quel moment.)

3 L'axiome fondamental de l'analyse

Par construction, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels contient $\mathbb{Q}$, vérifie les propriétés (A1) à (A5), (O1) à (O4), et (AO), ainsi que l'axiome supplémentaire suivant :

(A8) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$).

(Le numéro 8 vient de la convention d'appeler (A6) la collection (O1) à (O4), et (A7) la propriété (AO), par simple souci d'homogénéité.)

Ce cours ne se prête pas à la construction de $\mathbb{R}$, par manque d'outils et de temps.

Il est toutefois intéressant de considérer l'un des outils possibles, à savoir les *coupures* (de Dedekind) de $\mathbb{Q}$, à titre surtout d'entraînement à la manipulation des notions précédemment introduites.

[1] en fait on n'aura pas besoin ici de ce qui touche à la multiplication

Définition I.2 *On appelle* coupure *de $\mathbb{Q}$ une partition en deux ensembles disjoints non vides A et B (c'est-à-dire $A \subset \mathbb{Q}$, $B \subset \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$), telle que*

$$\forall a \in A\,,\ \forall b \in B\,,\quad a \leq b\,. \tag{3.1}$$

On vérifie immédiatement que les exemples suivants définissent des coupures de $\mathbb{Q}$:

Exemple 1. $A = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ r \leq 2\}\,,\qquad B = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ 2 < r\}\,.$

Exemple 2. $A = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ r < 2\}\,,\qquad B = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ 2 \leq r\}\,.$

Exemple 3. $A = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ r \leq 0 \text{ ou } r^2 < 2\}\,,\qquad B = \{r \in \mathbb{Q}\,; 0 < r \text{ et } 2 \leq r^2\}\,.$

De façon générale, si A et B définissent une coupure de $\mathbb{Q}$, plusieurs cas sont possibles :

i). supposons que A admette un élément maximal (c'est le cas dans l'exemple 1) : alors B ne peut pas admettre d'élément minimal (sinon on aurait $\max A \leq \min B$ d'après (3.1), et en fait $\max A < \min B$ puisque A et B sont disjoints, et $(\max A + \min B)/2$ serait un rationnel strictement inférieur à $\min B$ et strictement supérieur à $\max A$, ce qui l'empêcherait d'être dans $A \cup B$) ;

ii). supposons que B admette un élément minimal (c'est le cas dans l'exemple 2) : alors d'après (3.1), $\min B$ est un majorant de A, et par ailleurs d'après le point précédent, A ne peut pas admettre d'élément maximal, ce qui implique que tous les majorants de A sont nécessairement dans $\mathbb{Q}\backslash A = B$; donc $\min B$ est le plus petit des majorants de A et ainsi A admet comme borne supérieure $\sup A = \min B$;

iii). en dehors des deux cas précédents, A n'admet pas de borne supérieure (exemple 3). En effet, si c'était le cas, $\sup A$ serait nécessairement dans B (puisque pas dans A), qui n'admet pas d'élément minimal, donc il existerait $b \in B$ strictement inférieur à $\sup A$, et par conséquent il existerait un élément de A strictement supérieur à b.

Une fois ces faits observés, il est possible de construire $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$ et satisfaisant tous les axiomes (A1) à (A8), de sorte que, pour toute coupure (A, B) de $\mathbb{Q}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall a \in A\,,\ \forall b \in B\,,\quad a \leq x \leq b\,.$$

(Dans les exemples 1 et 2, $x = 2$. Dans l'exemple 3, $x = \sqrt{2}$: on verra au paragraphe 5 comment justifier la construction de $\sqrt{\ }$ à partir des axiomes de $\mathbb{R}$.)

4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition I.3 *On appelle* intervalle *de $\mathbb{R}$ toute partie $I \subset \mathbb{R}$ telle que,*

$$\forall x \in I\,,\ \forall y \in I\,,\ \forall z \in \mathbb{R}\,,\qquad (x \leq z \leq y \quad \Rightarrow z \in I)\,.$$

La propriété énoncée dans cette définition est appelée *convexité*. Autrement dit, les intervalles sont définis comme les parties convexes de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle. On le note parfois $]-\infty,+\infty[$, le symbole ∞ représentant l'infini : en effet, $\mathbb{R}$ contient en particulier $\mathbb{N}$, dont on peut *démontrer* qu'il n'est pas majoré, c'est-à-dire que quel soit l'entier il existe un entier strictement plus grand. (Une collègue m'a un jour suggéré de faire le parallèle avec les bêtises : je laisserai le lecteur méditer sur l'énoncé précédent en remplaçant le mot « entier » par le mot « bêtise » ...)

Lemme I.1 *L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.*

Dém. Raisonnons par l'absurde. Comme $\mathbb{N}$ contient 0, il est non vide. Supposons que $\mathbb{N}$ soit majoré. Alors d'après (A8), il admettrait une borne supérieure $M\in\mathbb{R}$. On aurait donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme $n+1\in\mathbb{N}$ aussi, $n+1\leq M$, d'où $n\leq M-1$: ainsi, $M-1$ serait un majorant de $\mathbb{N}$ strictement inférieur à M. □

Proposition I.3 *Il existe exactement neuf types d'intervalles de $\mathbb{R}$:*

$$\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

lui-même, et pour $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$,

$$]-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\,;\ x\leq a\}\,,\qquad]-\infty,a[=\{x\in\mathbb{R}\,;\ x<a\}\,,$$
$$[b,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,;\ b\leq x\}\,,\qquad]b,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,;\ b<x\}\,,$$
$$]a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,;\ a<x\leq b\}\,,\qquad]a,b[=\{x\in\mathbb{R}\,;\ a<x<b\}\,,$$
$$[a,b[=\{x\in\mathbb{R}\,;\ a\leq x<b\}\,,\qquad [a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,;\ a\leq x\leq b\}\,.$$

(Noter que $\emptyset=]a,a[$.) La démonstration de cette proposition consiste à discuter les cas, selon que l'intervalle admet une borne supérieure, un élément maximal, une borne inférieure, un élément minimal : c'est fastidieux mais facile.

Autres notations : $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$, $\mathbb{R}^{+*}=]0,+\infty[$, $\mathbb{R}^-=]-\infty,0]$, $\mathbb{R}^{-*}=]-\infty,0[$.

5 Outils de calcul dans $\mathbb{R}$

5.1 Les puissances entières

Quel que soit $x\in\mathbb{R}$, on définit *par récurrence* les puissances entières de x :

$$x^0=1\,,\quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}\,,\ x^{n+1}=x\,x^n\,.$$

Proposition I.4 *Les puissances paires sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.*

Dém. Pour une fois, voyons en détail comment l'on utilise les différents axiomes. On traite d'abord le cas $n = 2$. Si $x \geq 0$, alors $xx \geq 0$ d'après (AO). Si $x < 0$, alors on applique le point précédent à $-x$ (qui est strictement positif d'après (O4) et (AO) : si on avait $-x \leq 0$ alors on aurait $x - x < 0$) : ceci implique $(-x)(-x) \geq 0$. Mais d'après (A1) et (A2), $x^2 = (-1)^2\,(-x)^2$, et $(-1)^2 = 1$ (en effet, multiplier par -1 revient à prendre l'opposé : ceci se *déduit* de (A3), (A4), (A5), en écrivant $0 = (1+(-1))a = a+(-1)a$). On en déduit bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Le cas des autres entiers pairs se déduit de la propriété $x^{2k} = (x^k)^2$ (dont la démonstration, par récurrence, est laissée au lecteur). □

Proposition I.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, $x^n \leq x$, et pour tout $x \in [1,+\infty[$, $x^n \geq x$.*

Dém. On peut raisonner par récurrence. Les inégalités annoncées sont triviales lorsque $n = 1$. Elles sont vraies aussi pour $n = 2$, puisque d'après (AO) :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow xx \leq x\,,$$

$$x \geq 1 \Rightarrow xx \geq x\,.$$

Supposons-les démontrées pour n. Alors pour tout $x \in [0,1]$, en utilisant à nouveau (AO) on déduit de l'inégalité $x^n \leq x$ que $x^{n+1} \leq x^2 \leq x$ d'après le cas $n = 2$. De même, pour tout $x \in [1,+\infty[$, $x^{n+1} \geq x^2 \geq x$. □

Les propriétés élémentaires mises en évidence dans les propositions ci-dessus sont à maîtriser absolument.

Voyons maintenant une inégalité plus fine.

Proposition I.6 (Bernoulli) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$,*

$$(1+x)^n \;\geq\; 1 \,+\, nx\,,$$

avec inégalité stricte dès que ≥ 2.

Dém. Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont triviaux. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a la *formule du binôme de Newton*,

$$(y+x)^n \;=\; \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\, x^j\, y^{n-j}\,, \tag{5.2}$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, où les coefficients (dits du binôme) sont définis par :

$$\binom{n}{j} \;=\; \frac{n!}{j!(n-j)!}\,.$$

La formule (5.2) se démontre par récurrence sur n, en observant que les coefficients du binôme sont tels que

$$\binom{n}{j} \;=\; \binom{n-1}{j} \;+\; \binom{n-1}{j-1}\,.$$

(La preuve en est laissée au lecteur : on prendra garde au fait que cette formule repose de façon cruciale sur l'axiome de commutativité (A1).) Donc en particulier, on a pour tout $x > 0$,

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^j \geq 1 + n\,x + x^n > 1 + n\,x\,.$$

□

5.2 Les racines n-ièmes

Théorème I.1 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $y > 0$ tel que $y^n = x$. On notera $y = \sqrt[n]{x}$, et simplement $y = \sqrt{x}$ dans le cas $n = 2$.*

Dém. L'unicité découle immédiatement de (AO) : si $0 < y_1 < y_2$ alors $y_1^n < y_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. L'existence repose sur l'axiome (A8). Considérons en effet

$$A = \{\, t > 0\,;\; t^n < x\}\,.$$

C'est un ensemble non vide car

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^n \leq \frac{x}{x+1} < x\,,$$

donc $x/(x+1) \in A$. De plus il est majoré par $(1+x)$, car pour tout $t \geq 1+x$, $t^n \geq (1+x)^n \geq (1+x) > x$ et donc $t \notin A$. Donc A admet une borne supérieure : soit $y = \sup A$. Le but est de montrer que y est le nombre cherché, c'est-à-dire que $y^n = x$.

On raisonne par l'absurde.

- Supposons $y^n < x$. On peut alors choisir $h \in]0,1[$ tel que

$$h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}\,.$$

  Or d'après la *formule du binôme* (5.2),

$$(y+h)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j}\, h^j = y^n + h \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j}\, h^{j-1}$$

$$\leq y^n + h \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j} = y^n + h\,(\,(1+y)^n - y^n\,) < x$$

  d'après la propostion I.5 et par choix de h. Donc $y + h \in A$: ceci contredit le fait que y soit un majorant de A.
- Supposons $y^n > x$. On peut alors choisir $k \in]0,1[$, $k < y$ tel que

$$k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}\,.$$

Pour tout $t \geq y-k$, en utilisant comme précédemment la formule du binôme (en prenant garde au sens des inégalités),

$$t^n \geq (y-k)^n \geq y^n \, - \, k\left((1+y)^n - y^n\right) \, > \, x\,,$$

donc $t \notin A$. Ainsi, $y-k$ est un majorant de A, et il est strictement inférieur à y : ceci contredit le fait que y soit la borne supérieure de A.

□

5.3 Les valeurs absolues

Définition I.4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la* **valeur absolue** $|x|$ *de x par :*

$$|x| = x \quad \textit{si} \quad x \geq 0\,, \qquad |x| = -x \quad \textit{si} \quad x < 0\,.$$

Commençons par une observation fort utile en pratique, dont la preuve repose sur une application immédiate de la définition de la valeur absolue.

Lemme I.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $M \in \mathbb{R}$,*

$$-M \leq x \leq M \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq M\,.$$

On en déduit en particulier ce que l'on appelle l'**inégalité triangulaire** :

Proposition I.7 *Quels que soient a, $b \in \mathbb{R}$,*

$$|\,|a| \, - | \, b|\,| \, \leq |a+b| \, \leq |a| \, + \, |b|\,.$$

Dém. On commence par montrer l'inégalité de droite (l'inégalité triangulaire « standard »). En additionnant les inégalités

$$\begin{aligned} -|a| \leq \, a \, \leq \, |a|\,, \\ -|b| \leq \, b \, \leq \, |b|\,, \end{aligned}$$

on obtient en effet

$$-(|a|+|b|) \leq \, a+b \, \leq \, |a|+|b|\,,$$

d'où $|a+b| \, \leq |a| \, + \, |b|$ d'après le lemme I.2. Maintenant il suffit de émontrer l'inégalité de gauche pour $|a| \geq | \, b|$ (si ce n'est pas le cas, on échange a et b). D'après l'inégalité triangulaire standard appliquée à $-b$ et $a+b$, on a

$$|a| \, = \, |-b \, + \, a+b| \, \leq \, |-b| \, + \, |a+b| \, = \, |b| \, + \, |a+b|\,,$$

d'où

$$|\,|a| \, - | \, b|\,| \, = \, |a| \, - | \, b| \, \leq \, |a+b|\,.$$

□

L'inégalité triangulaire est l'un des outils fondamentaux en analyse : elle doit être absolument (!) maîtrisée.

On peut aller plus loin avec les valeurs absolues, grâce à l'observation suivante :

Proposition I.8 *Quels que soient a, $b \in \mathbb{R}$,*

$$\min\{a,b\} \;=\; \frac{a+b-|a-b|}{2}\,, \quad \max\{a,b\} \;=\; \frac{a+b+|a-b|}{2}\,.$$

Définition I.5 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit x^+ la* **partie positive** *de x, et x^- la* **partie négative** *de x par*

$$x^+ \;=\; \max\{x, 0\}\,, \quad x^- \;=\; \max\{-x, 0\}\,.$$

Un corollaire immédiat de la proposition I.8 est

Proposition I.9 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$x^+ \;=\; \frac{x+|x|}{2}\,, \quad x^- \;=\; \frac{-x+|x|}{2}\,, \quad x \;=\; x^+ \,-\, x^-\,, \quad |x| \;=\; x^+ \,+\, x^-\,.$$

5.4 Les parties entières

Proposition I.10 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$, que l'on notera $E(x)$ tel que*

$$n \;\leq\; x \;<\; n+1\,.$$

Dém. L'unicité est quasiment immédiate : en effet, si

$$n_1 \;\leq\; x \;<\; n_1+1 \quad \text{et} \quad n_2 \;\leq\; x \;<\; n_2+1\,,$$

alors

$$n_1 \,-\, n_2 \;<\; 1 \quad \text{et} \quad n_2 \,-\, n_1 \;<\; 1\,,$$

donc $n_1 = n_2$.

Pour l'existence, voyons d'abord le cas $x \geq 0$, et considérons l'ensemble

$$A \;=\; \{\, m \in \mathbb{N}\,;\; m \leq x\,\}\,.$$

Il est non vide puisque $0 \in A$ (car $0 \leq x$ par hypothèse). De plus, comme $\mathbb{N}$ n'est pas majoré (lemme I.1), il existe $k \in \mathbb{N}$, $k > x$. Donc

$$A \subset \{\, m \in \mathbb{N}\,;\; m \leq k-1\}$$

est fini. Donc d'après la proposition I.1, A admet un plus grand élément n. Comme $n+1 \notin A$, on en déduit

$$n \;\leq\; x \;<\; n+1\,.$$

Lorsque $x < 0$, si $x \in \mathbb{Z}$ on pose $E(x) = x$. Si $x \notin \mathbb{Z}$, on applique le cas précédent à $-x$:

$$E(-x) \;<\; -x \;<\; E(-x)+1\,,$$

d'où

$$-E(-x) \,-\, 1 < \; x \;<\; -E(-x) - 1 + 1\,.$$

On peut donc poser $E(x) \;=\; -E(-x) \,-\, 1$. $\square$

On définit parfois la *partie fractionnaire* de x par

$$[x] \;=\; x \,-\, E(x)\,.$$

Chapitre II

Suites numériques

Ce chapitre traite des suites de *nombres* réels ou complexes, d'où le terme de suite *numérique*.

Définition II.1 *Une* **suite réelle** *est une* fonction *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à chaque entier naturel* $n \in \mathbb{N}$ *associe un unique réel : il est d'usage de noter ce réel avec l'entier* n *en indice, par exemple* u_n*, et la suite elle-même est alors notée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *; le nombre* u_n *est appelé* **terme général** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. De la même façon, une* **suite complexe** *est une* fonction *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{C}$*, qui à chaque entier naturel* $n \in \mathbb{N}$ *associe un unique nombre complexe.*

1 Exemples de suites

Une suite peut être définie explicitement par une formule, par exemple

$$u_n = \cos(n\pi)\,,$$

ou par une *formule de récurrence*, exprimant u_{n+1} en fonction de u_n, par exemple

$$u_{n+1} = -\,u_n\,,$$

et une valeur initiale, par exemple $u_0 = 1$. On vérifie sans peine qu'en fait ces deux exemples coïncident, et définissent de deux façons différentes la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est un cas particulier de *suite géométrique*.

Définition II.2 *On appelle* **suite géométrique** *toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour laquelle il existe* $r \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), appelé* raison *de cette suite, tel que,*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} = r\,u_n\,.$$

On a une définition analogue en remplaçant la loi multiplicative par la loi additive de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) :

Définition II.3 *On appelle* **suite arithmétique** *toute suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour laquelle il existe* $a \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), appelé* raison *de cette suite, tel que,*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad v_{n+1} = a + v_n\,.$$

Proposition II.1 *Le terme général d'une suite géométrique de raison r est*

$$u_n = u_0 r^n .$$

Le terme général d'une suite arithmétique de raison a est

$$v_n = v_0 + n a .$$

La preuve se fait évidemment par récurrence ; elle est laissée au lecteur.

Un cas plus compliqué de définition par récurrence est celui des *récurrences d'ordre 2*, qui s'écrivent dans le cas linéaire :

$$u_{n+1} = b u_n + c u_{n-1} \tag{1.1}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, où b et c sont des réels donnés. On vérifie facilement qu'une telle formule de récurrence et les valeurs de u_0 et u_1 (les « données initiales »), définissent une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La plus célèbre d'entre elles est la *suite de Fibonacci*, correspondant à $b = c = 1$ et $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, qui est en fait une suite d'entiers. Pour cette suite, on connaît l'expression du terme général au moyen du *nombre d'or* $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est la *formule de Binet*

$$u_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} .$$

Plus généralement, on peut calculer explicitement le terme général de toute suite satisfaisant la relation de récurrence (1.1). L'idée est de chercher des suites *géométriques* satisfaisant (1.1), ce qui conduit à l'équation, dite caractéristique,

$$r^2 - b r - c = 0 . \tag{1.2}$$

La suite de la discussion dépend de la nature des solutions de l'équation du second degré (1.2).

Proposition II.2 *Si l'équation* (1.2) *a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, le terme général de toute suite réelle satisfaisant* (1.1) *est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n ,$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Si l'équation (1.2) *a deux solutions complexes conjuguées $r = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\overline{r}$, le terme général de toute suite réelle satisfaisant* (1.1) *est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 \rho^n \cos n\theta + \lambda_2 \rho^n \sin n\theta ,$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Si l'équation (1.2) *a une seule solution réelle $r_0 \neq 0$, le terme général de toute suite réelle satisfaisant* (1.1) *est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n ,$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

On vérifie facilement que ces expressions fournissent bien des suites satisfaisant (1.1). Pour montrer que toutes les suites satisfaisant (1.1) s'obtiennent ainsi, on a besoin d'un peu d'algèbre. Prenons par exemple le cas de racines réelles distinctes r_1 et r_2. Quel que soit le couple de réels (α, β), il existe au plus une suite satisfaisant (1.1) et telle que $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ (s'il y en avait deux, on montrerait par récurrence que tous les termes de leur différence sont nuls). Par ailleurs, puisque $r_1 \neq r_2$, il existe un unique couple de réels (λ_1, λ_2) tel que

$$\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \beta = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 .$$

Alors la suite de terme général

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$

satisfait (1.1), et $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ par construction. Pour le cas de racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$, on peut procéder de façon analogue. Il existe un unique couple de complexes conjugués $(\mu, \overline{\mu})$ tels que

$$\alpha = \mu + \overline{\mu} \quad \text{et} \quad \beta = \mu r + \overline{\mu}\, \overline{r} .$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \mu r^n + \overline{\mu}\, \overline{r}^n ,$$

et on obtient la forme annoncée en écrivant

$$\mu r^n + \overline{\mu}\, \overline{r}^n = 2\,\mathsf{Re}(\mu r^n) = 2\ \mathsf{Re}\,\mu\, \rho^n \cos n\theta - 2\ \mathsf{Im}\,\mu\, \rho^n \sin n\theta .$$

Le cas intermédiaire où l'équation caractéristique (1.2) a une seule racine réelle $r_0 = b/2 \neq 0$ se traite en remarquant que non seulement (r_0^n) mais aussi $(n\, r_0^n)$ vérifient la relation de récurrence (1.1). On trouve ainsi que

$$u_n = \alpha\, r_0^n + (\beta/r_0 - \alpha)\, n\, r_0^n$$

si (u_n) vérifie (1.1) et $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$.

2 Limites de suites

2.1 Introduction

Définition II.4 *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon .$$

Si c'est le cas, la suite est dite **convergente***. On dit aussi qu'elle converge vers ℓ. S'il n'existe pas de tel $\ell \in \mathbb{R}$, la suite est dite* **divergente***.*

La limite ℓ, lorsqu'elle existe, est unique (preuve par l'absurde laissée au lecteur), et on écrit

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n ,$$

ou plus simplement, $\ell = \lim(u_n)$.

Exemple. La suite de terme général $1/n$ a pour limite 0. (Conséquence immédiate du lemme I.1 et de la définition II.4 ci-dessus.)

Une suite divergente peut se comporter de différentes façons. Elle peut avoir une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) ou ne pas avoir de limite du tout !

Définition II.5 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ si et seulement si, pour tout $M > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \geq \; M\,.$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$ si et seulement si, pour tout $M < 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \leq \; M\,.$$

Exemples. La suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0 si $|r| < 1$, $+\infty$ si $r > 1$, et *pas de limite* si $r \leq -1$.

Proposition II.3 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie),*

- *s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que*

  $$\forall n \geq N\,, \quad u_n < M\,,$$

  (on dit que la suite est majorée par M à partir d'un certain rang), alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit $-\infty$, soit $\ell \in]-\infty, M]$;
- *s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que*

  $$\forall n \geq N\,, \quad u_n > M\,,$$

  (on dit que la suite est minorée par M à partir d'un certain rang), alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit $+\infty$, soit $\ell \in [M, +\infty[$.

Il est important de noter que dans les cas de limite finie, une inégalité stricte sur le terme général de la suite entraîne seulement une inégalité large sur la limite.

Définition II.6 *On dit d'une suite qu'elle est* **bornée** *si elle est minorée et majorée.*

Notons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

2.2 Opérations sur les limites

Proposition II.4

- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement, la suite somme $(w_n = u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell + \ell'$, et la suite produit $(x_n = u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell\ell'$. Si de plus v_n ne s'annule pas et $\ell' \neq 0$ alors la suite quotient $(y_n = u_n/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ/ℓ'.*

- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $+\infty$ respectivement, alors la suite somme a pour limite $+\infty$, la suite produit a pour limite $+\infty$ si $\ell > 0$ et $-\infty$ si $\ell < 0$ (le cas $\ell = 0$ étant « indéterminé »), tandis que la suite quotient a pour limite 0.*
- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite $+\infty$, alors la suite somme a pour limite $+\infty$ et la suite produit ont pour limite $+\infty$ (le cas de la suite quotient étant « indéterminé »).*

Dém. Le cas de la suite somme est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. Pour la suite produit, on utilise aussi l'inégalité triangulaire mais de façon un peu plus compliquée. Par exemple dans le cas limites finies ℓ et ℓ', on écrit :

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \le |u_n(v_n - \ell')| + |(u_n - \ell)\ell'|,$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition II.4, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$,

$$|u_n - \ell| \le \frac{\varepsilon}{2(|\ell'|+1)}, \quad |v_n - \ell'| \le \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}, \quad |u_n| \le |\ell| + 1,$$

d'où l'on obtient

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon\ell'}{2(|\ell'|+1)} \le \varepsilon.$$

Voyons aussi le cas de $(1/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lim(v_n) = \ell \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition II.4, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$,

$$|v_n - \ell| \le \frac{\varepsilon\ell^2}{2}, \quad v_n \ge \frac{\ell}{2},$$

d'où,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{v_n - \ell}{\ell\, v_n}\right| \le \varepsilon.$$

On en déduit alors le résultat pour $(u_n/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lim(v_n) \in \mathbb{R}^*$ grâce au résultat sur les produits. Les autres cas sont laissés au lecteur. □

Proposition II.5 (gendarmes) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.*

- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$,*

$$u_n \le v_n \le w_n,$$

  alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.
- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$,*

$$u_n \le v_n,$$

  alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
- *Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$,*

$$v_n \le w_n,$$

  alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$.

La preuve repose sur l'application immédiate de la définition des limites. Elle est laissée au lecteur.

Signalons un autre résultat assez facile à démontrer.

Proposition II.6 (recollement) *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$v_n = u_{2n} \quad \textit{et} \quad w_n = u_{2n+1} \quad \textit{quel que soit } \; n \in \mathbb{N}$$

ont une même limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a aussi pour limite ℓ.

Attention dans cet énoncé il est crucial que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aient la même limite. Si ce n'est pas le cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

3 Suites réelles monotones

Définition II.7 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* **croissante** *si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \leq u_{n+1} \, .$$

De façon analogue, elle est dite **décroissante** *si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \geq u_{n+1} \, .$$

Une suite est dite **monotone** *si elle est croissante ou décroissante.*

Proposition II.7 *Toute suite monotone admet une limite. Plus précisément :*
- *une suite croissante non majorée admet pour limite $+\infty$,*
- *une suite croissante majorée admet pour limite la borne supérieure de l'ensemble de ses valeurs,*
- *une suite décroissante non minorée admet pour limite $-\infty$,*
- *une suite décroissante minorée admet pour limite la borne inférieure de l'ensemble de ses valeurs.*

Proposition II.8 (suites adjacentes) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, l'une étant croissante et l'autre décroissante. Si de plus la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont la même limite.*

Dém. Supposons pour fixer les idées que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Alors $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, ce qui signifie que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$,

$$v_n - u_n \leq v_N - u_N \, .$$

On en déduit, grâce à la proposition II.3, que

$$0 \leq v_N - u_N \, ,$$

et ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$! Et puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N \leq v_N \leq v_0 .$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0), donc convergente d'après la proposition II.7. Enfin, comme $v_n = (v_n - u_n) + u_n$, on en déduit grâce à la proposition II.4 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente et de même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

4 Suites extraites

Définition II.8 *Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en est une* **suite extraite***, ou encore une* **sous-suite***, s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Nous avons déjà rencontré des exemples de suites extraites, dans la proposition II.6 : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour laquelle $\varphi : n \mapsto 2n$; de même que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est en une, avec $\varphi : n \mapsto 2n + 1$. On peut imaginer des suites extraites beaucoup plus compliquées.

La manipulation de suites extraites sera facilitée par le résultat préliminaire suivant.

Lemme II.1 *Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. En particulier, la suite de terme général $\varphi(n)$ a pour limite $+\infty$.*

Dém. On raisonne par récurrence. On a bien entendu $\varphi(0) \geq 0$. Supposons prouvée l'inégalité $\varphi(n) \geq n$. Comme par hypothèse $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$, et donc $\varphi(n + 1) \geq \varphi(n) + 1$ puisque ce sont des entiers, on a alors $\varphi(n + 1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n + 1$. □

Une façon assez subtile de construire une suite extraite à partir d'une famille de suites extraites est ce que l'on appelle le **procédé diagonal**, couramment utilisé en analyse. Il est fondé sur le lemme suivant, qui demande quelques efforts de réflexion : c'est un bon test pour savoir si l'on a compris la notion de fonction.

Lemme II.2 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, et définissons par récurrence les applications ψ_k, pour $k \in \mathbb{N}$, telles que*

$$\psi_0 = \varphi_0 \quad \textit{et} \quad \psi_{k+1} = \psi_k \circ \varphi_{k+1} ,$$

puis l'application

$$\Phi : n \mapsto \Phi(n) := \psi_n(n) .$$

Alors Φ est strictement croissante.

Dém. On commence par montrer, par récurrence sur k, que les applications ψ_k sont strictement croissantes. C'est évidemment le cas pour $k = 0$, puisque $\psi_0 = \varphi_0$ est strictement croissante par hypothèse. Supposons la propriéé démontrée pour ψ_k. Alors ψ_{k+1} est strictement croissante comme composée d'applications strictement croissantes (ψ_k et φ_{k+1}). On peut maintenant s'attaquer à Φ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a par définition

$$\Phi(n+1) \;=\; \psi_{n+1}(n+1) \;=\; \psi_n(\varphi_{n+1}(n+1))\,.$$

Or, d'après le lemme II.1 appliqué à φ_{n+1},

$$\varphi_{n+1}(n+1) \;\geq\; n+1 \;>\; n\,.$$

Donc, puisque ψ_n est strictement croissante,

$$\Phi(n+1) \;>\; \psi_n(n) \;=\; \Phi(n)\,.$$

□

Revenons à des choses plus élémentaires.

Proposition II.9 *Toute suite extraite d'une suite ayant une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, a aussi pour une limite ℓ.*

Ce résultat repose sur une application immédiate des définitions et du lemme II.1. On peut aussi le formuler comme suit.

Proposition II.10 *Si une suite admet des suites extraites ayant des limites différentes, alors elle n'a pas de limite.*

Théorème II.1 (Ramsey) *Toute suite* réelle *admet une sous-suite monotone.*

Dém. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Considérons l'ensemble

$$A \;:=\; \{\, n \in \mathbb{N}\,;\; \forall k \;>\; n\,,\; u_k \;<\; u_n \}\,.$$

Selon que A est fini ou non, on va pouvoir construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante ou décroissante. Si A est vide ou fini, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p_0$, $n \notin A$. En effet, si A est vide on peut prendre $p_0 = 0$, tandis que si A est non vide, il admet un élément maximal et l'on peut prendre $p_0 := \max A + 1$. Par définition de A il existe donc $p_1 > p_0$ tel que $u_{p_1} \geq u_{p_0}$. Puisque $p_1 > \max A$, p_1 n'appartient pas à A et l'on peut donc recommencer. On construit ainsi par récurrence une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, strictement croissante, telle $u_{p_{n+1}} \;\geq\; u_{p_n}$. Il suffit donc de considérer l'application

$$\varphi \;:\; n \;\to \varphi(n) \;:=\; p_n\,,$$

et la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante par construction. Voyons maintenant le cas où A est infini : il peut alors s'écrire

$$A \;=\; \{\, p_n\,;\; n \in \mathbb{N}\}$$

avec $p_n < p_{n+1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ (il suffit de prendre $p_0 = \min A$, puis $p_1 = \min A \backslash \{p_0\}$, etc.) Par définition de A on a $u_{p_{n+1}} < u_{p_n}$ pour tout n. Et donc la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$\varphi \,:\, n \to \varphi(n) \,:=\, p_n \,,$$

est strictement décroissante. □

Une conséquence immédiate de ce résultat et de la proposition II.7 est l'un des théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème II.2 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

5 Le critère de Cauchy

Pour déterminer si une suite est convergente lorsqu'on ne sait rien *a priori* sur son éventuelle limite, le critère de Cauchy est un outil fondamental. (On le reverra pour les fonctions, et dans les cours d'analyse ultérieurs pour certaines suites de fonctions.)

Définition II.9 *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **de Cauchy** *si elle vérifie le* **critère de Cauchy** *:*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall p \in \mathbb{N}\,, \forall q \in \mathbb{N}\,,\quad p \geq q \geq N \quad \Rightarrow \quad |u_p - u_q| \leq \varepsilon\,.$$

Lemme II.3 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Dém. Utilisons par exemple la propriété avec $\varepsilon = 1$ dans le critère de Cauchy : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$,

$$|u_p| \leq |u_N| + 1\,.$$

Par conséquent, la suite est majorée en valeur absolue par $\max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$, et donc bornée. □

Théorème II.3 *Une suite réelle est convergente si et seulement elle est de Cauchy.*

Dém. Le sens facile est de montrer qu'une suite convergente est de Cauchy. Supposons en effet la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et de limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$,

$$|u_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Alors d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $p \geq N$ et tout $q \geq N$,

$$|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

La réciproque demande plus de travail, et utilise en fait le théorème de Bolzano-Weierstrass. Soit une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après le lemme ci-dessus elle est bornée, donc admet une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, de limite ℓ. En utilisant le critère de Cauchy on peut en déduire que toute la suite converge vers ℓ. Soit en effet $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq q \geq N$

$$|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe $N' \geq N$ tel que pour $n \geq N'$,

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\varphi(n) \geq n$, on peut conclure grâce à l'inégalité triangulaire : pour tout $n \geq N'$,

$$|u_n - \ell| \leq |u_{\varphi(n)} - u_n| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

□

6 Suites complexes

Dans ce paragraphe on supposera connues les notions de base concernant les nombres *complexes*. Mentionnons au passage que l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est, comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, un corps commutatif. Cependant, il n'est pas muni d'une relation d'ordre compatible avec les opérations $+$ et $\times$ (voir le cours d'algèbre).

Hormis celles liées à la relation d'ordre (suites monotones, adjacentes, $+\infty$, $-\infty$), la plupart des notions (et les théorèmes associés) vues pour les suites réelles s'adaptent aux suites complexes, à condition de lire *module* au lieu de *valeur absolue*. En particulier, la définition d'une suite complexe convergente est la même que pour les suites réelles.

Définition II.10 *On dit qu'une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Si c'est le cas, la suite est dite **convergente**. *S'il n'existe pas de tel $\ell \in \mathbb{C}$, la suite est dite* **divergente**.

Proposition II.11 *Une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les suites réelles $(x_n := \mathsf{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n := \mathsf{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Si c'est le cas, on a*

$$\lim(z_n) = \lim(x_n) + i \lim(y_n).$$

Dém. Si (z_n) est convergente de limite $\ell = \lambda + i\mu$ avec $\lambda = \mathsf{Re}\,\ell$, $\mu = \mathsf{Im}\,\ell$, on montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers λ et μ en revenant aux définitions des limites et en utilisant les inégalités

$$|x_n - \lambda| = |\,\mathsf{Re}(z_n - \ell)| \leq |z_n - \ell|, \quad |y_n - \mu| = |\,\mathsf{Im}(z_n - \ell)| \leq |z_n - \ell|.$$

Réciproquement, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers λ et μ alors $(x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\lambda + i\mu)$ car

$$|x_n + iy_n - (\lambda + i\mu)| = \sqrt{(x_n - \lambda)^2 + (y_n - \mu)^2}$$

tend vers zéro.

Grâce à cette proposition on voit facilement que le théorème de Bolzano-Weierstrass est valable pour les suites complexes. Précisons tout d'abord ce qu'est une suite complexe bornée.

Proposition II.12 *Soient une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les suites réelles associées $(x_n := \mathsf{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n := \mathsf{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée,*
- *les deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.*

Si c'est le cas on dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

La démonstration se déduit immédiatement des inégalités

$$\max(|\,\mathsf{Re}\, z_n|, |\,\mathsf{Im}\, z_n|) \leq |z_n| \leq |\,\mathsf{Re}\, z_n| + |\,\mathsf{Im}\, z_n|\,.$$

Pour les suites extraites, la définition est identique au cas des suites réelles.

Théorème II.4 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite complexe bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

Dém. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors les suites réelles $(x_n := \mathsf{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n := \mathsf{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sont aussi. On peut donc leur appliquer le théorème II.2 (par exemple) commencer par extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis extraire une sous-suite convergente $(y_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est bornée puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est). Or la fonction $\varphi\circ\psi : n \mapsto \varphi(\psi(n))$ est strictement croissante (comme composée de fonctions strictement croissantes), donc $(z_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par construction $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en tant que suite extraite d'une suite convergente. Donc $(z_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (d'après la proposition II.11).

Le critère de Cauchy pour les suites complexes est encore le même que pour les suites réelles en lisant *module* au lieu de *valeur absolue*.

Définition II.11 *Une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le* **critère de Cauchy** *si :*

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall p \in \mathbb{N}\,, \forall q \in \mathbb{N}\,,\quad p \geq q \geq N \quad \Rightarrow \quad |z_p - z_q| \leq \varepsilon\,.$$

Grâce aux inégalités

$$\max(|\,\mathsf{Re}\, z_q - \mathsf{Re}\, z_q|, |\,\mathsf{Im}\, z_q - \mathsf{Im}\, z_p|) \leq |z_q - z_p| \leq |\,\mathsf{Re}\, z_q - \mathsf{Re}\, z_p| + |\,\mathsf{Im}\, z_q - \mathsf{Im}\, z_p|$$

on déduit de cette définition qu'une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si les suites réelles $(\mathsf{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathsf{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy. Une conséquence du théorème II.3 et de la proposition II.11 est alors la suivante.

Théorème II.5 *Une suite complexe est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.*

7 Approximation des nombres réels

Théorème II.6 *Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels convergeant vers x.*

On dit que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$. Si l'on ne cherche pas à préciser les valeurs de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$), ce théorème peut se déduire du résultat suivant.

Théorème II.7 *Quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, il existe $r \in \mathbb{Q}\cap]a, b[$.*

Dém. D'après le lemme I.1, il existe un entier naturel $q > 1/(b-a)$. Par suite, l'intervalle $]qa, qb[$ est de longueur $q(b-a) > 1$ et contient donc forcément un entier relatif p (car la distance minimale entre deux entiers relatifs est 1). Le nombre rationnel $r = p/q$ répond à la question.

Dém. [Théorème II.6] Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème II.7, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $r_n \in \mathbb{Q}\cap]x, x + 2^{-n}[$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Remarque II.1 *On a aussi un résultat « symétrique » du théorème II.7, à savoir que quels que soient $r, s \in \mathbb{Q}$ avec $r < s$, il existe $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap]r, s[$. En effet, en réduisant r et s au même dénominateur, cela revient à trouver $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $p < qx < m$ où p, q et m sont des entiers tels que $m \geq p + 1$ et $q \geq 1$. Il suffit donc de poser $x = \frac{1}{q\sqrt{2}} + \frac{p}{q}$, qui est irrationnel puisque $\sqrt{2}$ l'est.*

Le théorème abstrait II.6 ne donne cependant pas de méthode d'approximation du réel x par des rationnels. La plus familière est la *représentation décimale*, dont l'existence et l'unicité est fournie par le résultat suivant.

Théorème II.8 *Quel que soit $x \in \mathbb{R}^+$, il existe une unique suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels convergeant vers x, de la forme*

$$r_0 = q\,, \quad r_n = q + \sum_{k=1}^{n} p_k\, 10^{-k} \quad \forall n \geq 1\,,$$

où $q = E(x)$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels compris entre 0 et 9 vérifiant la propriété (P) : pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq N$ tel que $p_n \neq 9$.

Comme tout entier naturel q peut se « décomposer en base 10 », c'est-à-dire qu'il existe $J \in \mathbb{N}$ et des entiers naturels $q_0, \ldots, q_J$ compris entre 0 et 9 tels que

$$q = \sum_{j=0}^{K} q_j\, 10^j$$

(la démonstration est laissée au lecteur), les entiers q_j sont les « chiffres avant la virgule » et les entiers p_k sont les « chiffres après la virgule » dans la *représentation décimale* de x, qu'on appelle aussi *développement décimal* et qu'on écrit généralement (de façon tronquée) :

$$x = q_J \ldots q_0, p_1 p_2 \ldots p_n p_{n+1} \cdots .$$

Par exemple pour le nombre π, on apprend à l'école que

$$q_0 = 3\,,\ p_1 = 1\,,\ p_2 = 4\,,\ p_3 = 1\,,\ p_4 = 5\,,\ p_5 = 9\,,\ p_6 = 2\,,\ p_7 = 6\,,\ p_8 = 5\,,\ ...$$

et actuellement (en 2010) on a calculé par ordinateur p_n jusqu'à $n = 5000000000000$. La propriété de non-stationarité *(P)* évite les problèmes de non-unicité : si on ne l'impose pas, on peut par exemple écrire

$$1/10 = 0,1000000000... = 0,0999999999...\,,$$

c'est-à-dire le même nombre $1/10$ avec $p_1 = 1$, $p_n = 0$ pour tout $n \geq 2$ ou alors $p_1 = 0$, $p_n = 9$ pour tout $n \geq 2$. La propriété *(P)* demande de ne retenir que la première écriture, dans laquelle on omet bien sûr les zéros : $1/10 = 0,1$.

Dém. [Théorème II.8] Posons $x_0 = x - E(x) \in [0,1[$ la partie fractionnaire de x. Alors $10x_0 \in [0,10[$, donc $E(10x_0)$ est un entier compris entre 0 et 9. On pose $p_1 = E(10x_0)$ et $x_1 = x_0 - p_1/10$. On peut ensuite définir $p_n \in \{0, \dots 9\}$ et $x_n \in [0, 10^{-n}[$ par récurrence en posant

$$p_{n+1} = E(10^{n+1}\, x_n)\,, \quad x_{n+1} = x_n - p_{n+1}/10^{n+1}\,.$$

D'après le théorème des gendarmes la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro. Or on voit par récurrence que

$$x_n \;=\; x_0 \;-\; \sum_{k=1}^{n} p_k\, 10^{-k} \;=\; x \;-\; E(x) \;-\; \sum_{k=1}^{n} p_k\, 10^{-k}\,.$$

On a donc bien une approximation de x de la forme voulue. Il reste à montrer qu'elle vérifie la propriété *(P)* et qu'elle est unique. Pour *(P)* on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $p_n = 9$. Alors

$$x_n \;=\; x_{N-1} \;-\; 9 \sum_{k=N}^{n} 10^{-k} \;=\; x_{N-1} \;-\; 10^{-N+1} + 10^{-n}$$

d'après la formule de sommation des termes d'une suite géométrique. En passant à la limite $n \to \infty$ on en déduit $x_{N-1} = 10^{-N+1}$, ce qui contredit le fait que $x_{N-1} \in [0, 10^{-N+1}[$. Pour l'unicité, tout revient à démontrer que si

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k\, 10^{-k} \;=\; x_0 \in [0,1[$$

avec $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels compris entre 0 et 9 vérifiant la propriété *(P)*, nécessairement $p_n = E(10^n x_{n-1})$ avec $x_n = x_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k\, 10^{-k}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons pour y voir clair par le cas $n = 1$. Pour montrer que $p_1 = E(10x_0)$, il faut et il suffit de montrer que $0 \leq 10x_0 - p_1 < 1$. Or

$$10x_0 - p_1 \;=\; \lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{m} p_k\, 10^{-k+1}$$

et

$$0 \leq \sum_{k=2}^{m} p_k \, 10^{-k+1} \leq 9 \sum_{k=2}^{m} 10^{-k+1} - 10^{-K+1}$$

si $p_K \leq 8$ (on sait qu'il existe un tel K d'après la propriété *(P)*). En passant à la limite $m \to \infty$ on obtient donc

$$0 \leq 10x_0 - p_1 \leq 1 - 10^{-K+1} < 1\,.$$

Le cas n général se traite en fait exactement de la même manière. Pour montrer que $0 \leq 10^n x_{n-1} - p_n < 1$ on observe que

$$10^n x_{n-1} - p_n = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} p_k \, 10^{-k+n}$$

et comme il existe $K \geq n+1$ tel que $p_K \leq 8$ on a

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{m} p_k \, 10^{-k+n} \leq 9 \sum_{k=n+1}^{m} 10^{-k+n} - 10^{-K+n}\,,$$

d'où à la limite $m \to \infty$,

$$0 \leq 10^n x_{n-1} - p_n \leq 1 - 10^{-K+1} < 1\,.$$

Pour un nombre réel négatif, on convient que son développement décimal est donné par celui de son opposé : ceci veut dire en particulier que le nombre m avant la virgule n'est pas $E(x)$ mais $E(x)+1$.

Une question naturelle est de savoir reconnaître un nombre rationnel d'après sa représentation décimale. La réponse fait appel à la notion de suite périodique.

Définition II.12 *Une suite (pas nécessairement d'entiers) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* **périodique** *à partir d'un certain rang s'il existe des entiers naturels N et K tels que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+K=}u_n$. L'entier K est alors appelé la* période *de cette suite.*
On dit que le **développement décimal** *d'un nombre réel*

$$x = q_J..q_0, p_1p_2...p_np_{n+1}...$$

est **périodique** *à partir d'un certain rang si la suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.*

Par exemple, le développement décimal de $1/3 = 0,33333...$ est périodique de période 1, celui de $1/7$ est de période 6. Ces développements de rationnels s'obtiennent en posant une division :

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 3 \\ \cline{2-2}
1\,0 & 0{,}3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3 \\
\hphantom{0}1\,0 & \\
\hphantom{00}1\,0 & \\
\hphantom{000}1\,0 & \\
\hphantom{0000}1\,0 & \\
\hphantom{00000}1\,0 & \\
\hphantom{000000}1\,0 & \\
\hphantom{0000000}1\,0 & \\
\hphantom{00000000}1\,0 & \\
\hphantom{0000000000}1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
1 & 7 \\ \cline{2-2}
1\,0 & 0{,}1\,4\,2\,8\,5\,7\,1\,4\,2 \\
\hphantom{0}3\,0 & \\
\hphantom{00}2\,0 & \\
\hphantom{000}6\,0 & \\
\hphantom{0000}4\,0 & \\
\hphantom{00000}5\,0 & \\
\hphantom{000000}1\,0 & \\
\hphantom{0000000}3\,0 & \\
\hphantom{00000000}2\,0 & \\
\hphantom{0000000000}6 &
\end{array}
$$

Théorème II.9 *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Dém. Montrons pour commencer que le développement décimal de tout nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang. Il suffit de traiter les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1. Soit donc $r = p/q$ un tel nombre, avec p et q des entiers premiers entre eux, $p < q$. Le développement décimal de r se calcule au moyen de la *division euclidienne*, et plus précisément de la « division à virgule » comme on l'a vu sur les exemples. En effet, si l'on effectue la division euclidienne de $10p$ par q on obtient un entier p_1 et un entier $m_1 \in \{0, \dots, q-1\}$ tels que $10p = p_1 q + m_1$, d'où $p_1 \leq 10p/q = p_1 + m_1/q < p_1 + 1$: ceci montre que $p_1 = E(10p/q)$. On peut ensuite continuer par récurrence et construire des suites d'entiers $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k\in N}$ telles que $m_k \in \{0, \dots, q-1\}$ et

$$10m_k = p_{k+1}q + m_{k+1} \, ,$$

de sorte que $p_{k+1} = E(10m_k/q)$. La multiplication du reste m_k par 10 revient à « abaisser un zéro » dans la division à virgule. Ceci fournit bien les valeurs du développement décimal de p/q car on a

$$10m_k/q = 10^{k+1}x_k \, , \quad x_k := p/q \, - \, \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell 10^{-\ell}$$

(pour reprendre la même notation que dans la démonstration du théorème II.8). La formule $m_k/q = 10^k x_k$ est en effet vraie pour $k = 1$ par définition de m_1, et les suites (m_k), (x_k) vérifient les formules de récurrence

$$m_{k+1} = 10m_k - p_{k+1}q \, , \quad x_{k+1} = x_k - p_{k+1}\, 10^{-k-1} \, ,$$

si bien que (m_k/q) et $(10^k x_k)$ vérifient la même formule de récurrence $y_{k+1} = 10y_k - p_{k+1}$.

Si jamais l'un des restes, disons m_K est nul alors par définition $p_{k+1} = m_{k+1} = 0$ pour tout $k \geq K$. Le développement décimal obtenu est donc périodique de période 1 à partir du rang $K+1$ et on l'écrit en omettant tous les zéros :

$$p/q = 0, p_1 p_2 ... p_K$$

est précisément ce qu'on appelle un *nombre décimal.*

Sinon, tous les restes m_k sont des entiers compris entre 1 et $q-1$ par définition. L'ensemble $\{1, \dots, q-1\}$ étant fini, il existe nécessairement deux entiers naturels distincts, disons N et $N+K$ tels que $m_N = m_{N+K}$. Alors les suites $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont périodiques de période K à partir du rang N. En effet, sachant que m_{k+1} est le reste et p_{k+1} est le quotient dans la division euclidienne de $10m_k$ par q, quel que soit k, on montre par récurrence que $m_{N+n} = m_{N+n+K}$ et $p_{N+n} = p_{N+n+K}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ceci achève de démontrer que le développement décimal de tout nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang.

Réciproquement, montrons que tout nombre réel dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang est rationnel. Soit x un tel nombre, qu'on peut supposer positif sans perte de généralité. Il suffit de montrer que sa partie fractionnaire $x_0 = x - E(x)$ est rationnelle. Par hypothèse le développement décimal de x_0 est donné par une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ périodique, disons de période K, à partir d'un certain rang, disons N. Par définition du développement décimal on a

$$x_0 = 0, p_1 ... p_{N-1} p_N ... p_{N+K-1} p_N ... p_{N+K-1} \cdots p_{N+K-1} p_N \cdots p_{N+K-1} \cdots$$

d'où

$$\begin{aligned} 10^{N-1} x_0 &= p_1 ... p_{N-1}, \quad p_N \cdots p_{N+K-1} p_N \cdots p_{N+K-1} \cdots \\ 10^{N-1+K} x_0 &= p_1 ... p_{N-1} p_N ... p_{N+K-1}, \quad p_N \cdots p_{N+K-1} p_N \cdots p_{N+K-1} \cdots \end{aligned}$$

et donc

$$10^{N-1+K} x_0 - 10^{N-1} x_0 = p_1 ... p_{N-1} p_N ... p_{N+K-1} - p_1 ... p_{N-1} \in \mathbb{N} \,.$$

Ceci montre que x_0 est rationnel (quotient de l'entier $p_1 ... p_{N-1} p_N ... p_{N+K-1} - p_1 ... p_{N-1}$ par l'entier $10^{N-1+K} x_0 - 10^{N-1}$).

Remarque II.2 *Ce qui précède se généralise dans toute* base *de développement* $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, *en remplaçant* 10 *par* b. *Lorsque* $b = 2$ *on parle de* développement dyadique *: les entiers* p_k *d'un développement dyadique peuvent prendre seulement deux valeurs,* 0 *ou* 1, *c'est la base de l'informatique actuelle.*

Remarque II.3 *Pour d'autres méthodes d'approximation des réels, en particulier celle par les* fractions continues, *voir par exemple le chapitre 23 de* Mathématiques L1 Cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés, *Pearson Education, 2007.*

8 Compléments

8.1 Valeurs d'adhérence

Définition II.13 *Pour une suite numérique (réelle ou complexe) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une valeur d'adhérence est un nombre (réel ou complexe) a tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers n pour lesquels*

$$|u_n - a| \leq \varepsilon .$$

Proposition II.13 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique (réelle ou complexe) et a un nombre (réel ou complexe). Alors a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a.*

Dém. Dans un sens c'est une application immédiate de la définition ci-dessus. En effet, s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_{\varphi(n)} - a| \leq \varepsilon .$$

Ceci montre que a est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisque l'ensemble

$$\{ \varphi(n) \, ; \; n \geq N \}$$

est infini. Réciproquement, supposons que a soit une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ (grâce à la propriété de la définition pour $\varepsilon = 1/(k+1)$), il existe une infinité d'entiers n pour lesquels

$$|u_n - a| \leq \frac{1}{k+1} .$$

En particulier, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_{p_0} - a| \leq 1 ,$$

et il existe $p_1 > p_0$ et supérieur à 1 tel que

$$|u_{p_1} - a| \leq \frac{1}{2} .$$

Faisons l'hypothèse de récurrence que l'on a construit n entiers $p_0 < p_1 < \cdots < p_n$ tels que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$|u_{p_k} - a| \leq \frac{1}{k+1} \quad \text{et} \quad p_k \geq k .$$

Alors il existe $p_{n+1} > p_n$ et supérieur à $n+1$ tel que

$$|u_{p_{n+1}} - a| \leq \frac{1}{n+2} .$$

On construit ainsi une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, strictement croissante et ayant pour limite $+\infty$ (puisque $p_n \geq n$), telle que $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a (d'après le théorème des gendarmes, puisque $|u_{p_n} - a| \leq 1/(n+1)$). □

8.2 Limite sup et limite inf

Définition II.14 *Pour une suite* réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *majorée on définit sa* limite sup *comme*

$$\overline{\lim}(u_n) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k\,;\; k \geq n\}\,.$$

De façon analogue, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *minorée on définit sa* limite inf *comme*

$$\underline{\lim}(u_n) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_k\,;\; k \geq n\}\,.$$

Proposition II.14 *Soit une suite* réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée. Alors* $\underline{\lim}(u_n)$ *est la plus petite valeur d'adhérence de* (u_n)*,* $\overline{\lim}(u_n)$ *est la plus grande valeur d'adhérence de* (u_n)*, on a toujours les inégalités*

$$\inf\{u_n\,;\; n\in\mathbb{N}\} \;\leq\; \underline{\lim}(u_n) \;\leq\; \overline{\lim}(u_n) \;\leq\; \sup\{u_n\,;\; n\in\mathbb{N}\}\,,$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* $\ell\in\mathbb{R}$ *si et seulement si*

$$\underline{\lim}(u_n) \;=\; \overline{\lim}(u_n) \;=\; \ell\,.$$

La démonstration est laissée au lecteur à titre d'exercice sur les notions de valeurs d'adhérence, de bornes supérieures et inférieures.

Attention, contrairement à celle de limite, les notions de limite sup et limite inf ne sont pas linéaires. On a en particulier

$$\underline{\lim}(-u_n) \;=\; -\;\overline{\lim}(u_n)\,, \quad \overline{\lim}(-u_n) \;=\; -\;\underline{\lim}(u_n)\,,$$

et les inégalités

$$\underline{\lim}(u_n) \,+\, \underline{\lim}(v_n) \;\leq\; \underline{\lim}(u_n+v_n)\,, \quad \overline{\lim}(u_n+v_n) \;\leq\; \overline{\lim}(u_n) \,+\, \overline{\lim}(v_n)\,,$$

sont strictes en général (comme on le voit sur l'exemple de $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-1)^{n+1}$).

8.3 Introduction à la dynamique

Les suites définies par une formule de récurrence (non-linéaire) $u_{n+1} = f(u_n)$ définissent ce que l'on appelle des *systèmes dynamiques discrets*. On parle de *dynamique réelle* ou de *dynamique complexe* selon que les suites en question sont réelles ou complexes. Quoi qu'il en soit, la fonction $f : D \to A$ doit être telle que $A \subset D$ pour que l'on puisse définir une suite à partir de la formule $u_{n+1} = f(u_n)$ quel que soit $u_0 \in D$. (Sinon, en prenant $u_0 \in D$ tel que $u_1 = f(u_0) \notin D$ on est déjà bloqué pour calculer u_2.) Bien sûr, si A n'est pas inclus dans D on peut quand même espérer construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en choisissant convenablement u_0 (c'est-à-dire tel que $f(u_0) \in D$ et en prenant garde à chaque étape de vérifier que $f(u_n) \in D$) : c'est le cas par exemple pour les suites *homographiques*, correspondant à $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ avec a, b, c, d des paramètres réels ou complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

On a vu des exemples simples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ au début de ce chapitre, à savoir les suites arithmétiques (pour lesquelles $f : z \mapsto z + a$) et les suites géométriques (avec $f : z \mapsto rz$). Un exemple un plus plus compliqué mais pour lequel on peut encore calculer explicitement le terme général est le « mélange » des deux, à savoir celui des suites arithmético-géométriques, pour lesquelles f est une fonction *affine* : si $r \neq 1$ et $u_{n+1} = ru_n + a$ pour tout n alors

$$u_n = \frac{a}{1-r} + r^n \big(u_0 - \frac{a}{1-r}\big) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Pour des fonctions f plus compliquées on ne peut pas calculer explicitement le terme général des suites associées. Un exemple encore assez simple en apparence est

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & z^2 + c\,, \end{array}$$

où $c \in \mathbb{C}$ est donné. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la formule de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$, on n'a pas de formule « simple », c'est-à-dire sans points de suspension, donnant z_n en fonction de n, sauf si $c = 0$ (auquel cas $z_n = z_0^{2^n}$). En fait, l'étude de ce type de suite conduit à la définition d'un ensemble de paramètres c appelé *ensemble de Mandelbrot*, prototype d'ensemble *fractal* dont on pourra trouver de nombreuses et fascinantes images sur Internet.

On peut néanmoins démontrer un résultat assez général, à savoir la convergence des suites définies par une classe particulière de fonctions (ne contenant pas l'exemple précédent !).

Proposition II.15 *Soient $A \subset D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \to A$ une fonction* contractante *, c'est-à-dire telle qu'il existe $r \in]0, 1[$ pour lequel on ait*

$$|f(z) - f(w)| \leq r\,|z - w| \quad \forall z\,,\, w \in D\,.$$

Alors toute suite définie par la formule de récurrence $z_{n+1} = f(z_n)$ est convergente.

Dém. C'est un exemple d'application du critère de Cauchy. Soit en effet $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'hypothèse sur f et une récurrence immédiate montrent que

$$|z_{n+1} - z_n| \leq r^n\,|z_1 - z_0| \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

On utilise ensuite l'idée de la *somme télescopique* : pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on a

$$z_{n+p} - z_n = \sum_{k=0}^{p-1} (z_{n+k+1} - z_{n+k})\,,$$

d'où par l'inégalité triangulaire,

$$|z_{n+p} - z_n| \leq |z_1 - z_0| \sum_{k=0}^{p-1} r^{n+k} = |z_1 - z_0|\, r^n\, \frac{1 - r^p}{1 - r}$$

d'après la formule de sommation des termes d'une suite géométrique de raison r. Comme $r \in]0, 1[$, $\lim_{n\to\infty}(r^n) = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$,

$$r^n \leq \varepsilon \frac{1 - r}{1 + |z_1 - z_0|}\,,$$

ce qui implique $|z_{n+p} - z_n| \leq \varepsilon$ d'après la majoration obtenue ci-dessus. Donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et par conséquent convergente.

Revenons maintenant au cadre *réel* (pour pouvoir appliquer des arguments de signe et de monotonie) et considérons une fonction *continue* (on verra au prochain chapitre la définition précise de la continuité)

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subset \mathbb{R} & \to & A \subset D \\ & x & \mapsto & f(x)\,, \end{array}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in D$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On va voir que les propriétés de *monotonie* de la fonction f et le *signe* de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sont déterminantes dans l'étude de cette suite.

Commençons par observer que, puisque f est continue, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in D$ alors nécessairement $f(\ell) = \ell$. On est donc amené à rechercher les *points fixes* de la fonction f, c'est-à-dire justement les réels ℓ tels que $f(\ell) = \ell$. Noter que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u_N soit un point fixe de f, c'est-à-dire que $u_N = f(u_N)$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire* car une récurrence immédiate montre que $u_n = u_N$ quel que soit $n \geq N$. (Plus généralement, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que u_N soit un point fixe de $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période k à partir du rang N, le cas stationnaire correspondant à $k = 1$.)

Supposons ensuite que f est croissante. Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone : elle est croissante si $u_0 \leq f(u_0)$, décroissante si $u_0 \geq f(u_0)$ (la démonstration relève d'une récurrence immédiate). Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a nécessairement une limite.

Si en revanche f est décroissante, la situation est un peu plus compliquée, et ce qui compte n'est pas la position de $u_1 = f(u_0)$ par rapport à u_0 mais celle de $u_2 = f \circ f(u_0)$ par rapport à u_0. Plus précisément, si $u_0 \leq u_2$ alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissantes et décroissantes, tandis que si $u_0 \geq u_2$ les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement décroissantes et croissantes. Dans les deux cas, elles ont donc une limite, et d'après la proposition II.6, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite si et seulement les limites de ces suites extraites sont les mêmes (ce qui reste à étudier en général).

Bien sûr, une fonction f n'est ni croissante ni décroissante en général. On peut cependant appliquer l'un des raisonnements précédents si u_0 appartient à un intervalle $[a, b] \subset D$ *invariant* par f, c'est-à-dire tel que $f([a, b]) \subset [a, b]$, sur lequel f est monotone. Notons que cela impose $a \leq f(a) < f(b) \leq b$ si la restriction $f_{|[a,b]}$ est croissante et non constante, et $a \leq f(b) < f(a) \leq b$ si $f_{|[a,b]}$ est décroissante et non constante : dans les deux cas, la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ change de signe entre a et b ; puisqu'elle est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (voir p. 49 au chapitre suivant), g s'annule nécessairement sur $]a, b[$, ce qui signifie que f a un point fixe dans $]a, b[$. On est donc amené à rechercher les intervalles $[a, b]$ (contenant un point fixe) tels que $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$ sur lesquels f est monotone.

À titre d'exercice on pourra essayer d'appliquer ces principes généraux à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + c$ pour différentes valeurs du paramètre c (par exemple, $c = 1$, $c = 0$, $c = -1$). Il est recommandé de faire des dessins, où l'on représentera le graphe de f, la première bissectrice et quelques valeurs de u_n selon la position de u_0.

Chapitre III

Fonctions d'une variable réelle

1 Notions et notations de base

1.1 Définitions

Commençons par les définitions générales.

Définition III.1 *Une* fonction d'une variable réelle *est une application, qui à tout élément d'une partie D de $\mathbb{R}$ associe un unique élément d'une partie A de $\mathbb{R}$. Pour une fonction f, on note*

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ D & \to & A \\ x & \mapsto & f(x)\,. \end{array}$$

Pour tout $x \in D$, le nombre $f(x)$ est appelé image *de x par f. L'ensemble D est appelé* domaine de définition *de f, et l'ensemble des images des points de D,*

$$f(D) \ := \ \{\, y \ = \ f(x)\,;\ x \in D\,\}$$

est appelé image *de f . Pour tout y dans l'image de f, tout élément x de D tel que $y = f(x)$ est appelé* antécédent *de y. Pour toute partie B de A, l'ensemble des antécédents des points de B est noté*

$$f^{-1}(B) \ := \ \{\, x \in D\,;\ f(x) \in B\,\}\,.$$

L'ensemble

$$G_f \ := \ \{\, (x, f(x))\,;\ x \in D\,\} \ \subset \ \mathbb{R}^2$$

est appelé graphe *de f. Le tracé de G_f dans le plan muni d'un repère orthonormé est la représentation graphique de f ou encore (par abus de langage) la courbe de f (souvent notée C_f).*

Certaines fonctions sont dotées de propriétés particulières...

Définition III.2 *Une fonction*

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ D & \to & A \\ x & \mapsto & f(x)\,. \end{array}$$

est dite

- surjective *si et seulement si tout point de* A *admet* au moins un antécédent*, c'est-à-dire que* $f(D) = A$ *;*
- injective *si et seulement si tout point de* A *admet* au plus un antécédent*, c'est-à-dire que pour tous* x_1*,* $x_2 \in D$*,*
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2\,;$$
- bijective *si et seulement si elle est à la fois surjective et injective, c'est-à-dire que pour tout* $y \in A$*, il existe un unique* $x \in D$ *tel que* $y = f(x)$ *: dans ce cas, on note* $x = f^{-1}(y)$*, et* f^{-1} *est une fonction de* A *dans* D*, appelée* fonction réciproque *de* f*.*

Remarque III.1 *La courbe (dans un repère orthonormé) d'une fonction bijective est symétrique de celle de sa fonction réciproque par rapport à la première bissectrice.*

Définition III.3 *Étant données deux fonctions*

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & A \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} g: & A & \to & B \\ & y & \mapsto & g(y)\,, \end{array}$$

on définit la fonction composée $g \circ f$ *par*

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & D & \to & B \\ & x & \mapsto & g(f(x))\,. \end{array}$$

1.2 Exemples

On dispose d'un arsenal de *fonctions usuelles*, dites aussi *élémentaires*, dont certaines ont été rencontrées sans le dire au premier chapitre. Les exemples donnés ci-dessous visent entre autres à mettre en évidence l'importance du choix de l'ensemble de définition et de l'ensemble d'arrivée pour les propriétés d'injectivité et de surjectivité.

• Fonctions constantes : pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et pour tout réel a la fonction constante

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \end{array}$$

n'est évidemment pas injective, sauf si A est un singleton, ni surjective. Elle devient cependant surjective si l'on change l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ en $\{a\}$.

• Fonction *identité* : pour toute partie B de $\mathbb{R}$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{id}_B: & B & \to & B \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

est bijective et sa fonction réciproque est elle-même. Notons au passage que pour toute fonction $f: B \to B$ on a $\mathrm{id}_B \circ f = f \circ \mathrm{id}_B$ (c'est-à-dire que id_B est neutre pour la loi de composition $\circ$), et que pour toute fonction bijective

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & A \\ & x & \mapsto & f(x)\,, \end{array}$$

on a

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D \,.$$

• Fonction *puissance* : pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction

$$p_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \,. \end{array}$$

Pour $n = 0$ on retrouve la fonction constante $x \mapsto 1$, et pour $n = 1$, la fonction identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. On montre que p_n est bijective si et seulement si n est impair. Pour n pair non nul, la fonction

$$\widetilde{p}_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

est surjective mais pas injective, tandis que

$$\widehat{p}_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^n \,. \end{array}$$

est bijective.

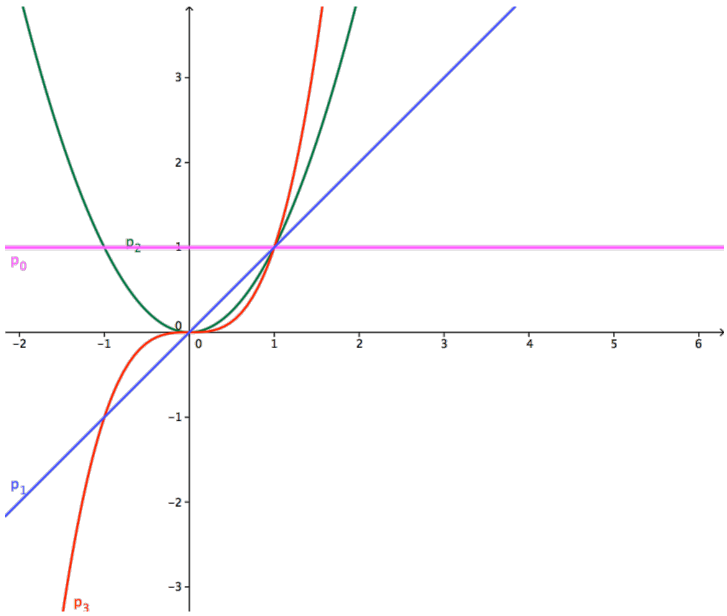

FIG. III.1 – Courbes des fonctions puissance n-ième, $n = 0, 1, 2, 3$.

• Fonction *racine n-ième* : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair, on peut définir (grâce au théorème I.1)

$$\widehat{r}_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

comme la fonction réciproque de la fonction $\widehat{p}_n$ définie ci-dessus, et pour $n \in \mathbb{N}^*$ impair, on peut définir (en utilisant à nouveau le théorème I.1 et en posant $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ pour $x < 0$)

$$r_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

comme la fonction réciproque de la fonction p_n.

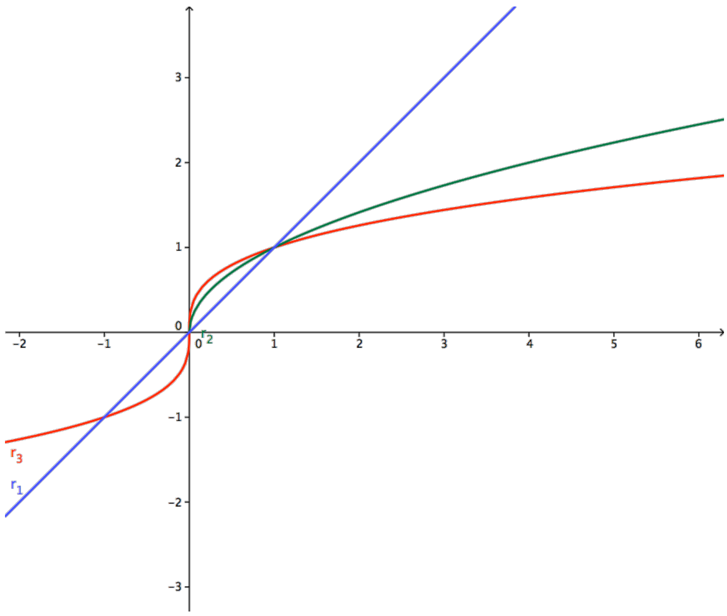

FIG. III.2 – Courbes des fonctions racine n-ième, $n = 1, 2, 3$.

• Fonction *valeur absolue* : la fonction

$$\begin{array}{rccc} v\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

est surjective mais pas injective.

• Fonction *partie entière* : la fonction

$$\begin{array}{rccc} E\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & E(x) \end{array}$$

est surjective mais pas injective.

• Fonctions *homographiques* : étant donnés quatres réels a, b, $c \neq 0$ et d, on peut considérer la fonction

$$\begin{array}{rccc} h\ : & \mathbb{R}\backslash\{-d/c\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$

et remarquer l'égalité :

$$ch(x) = a + \frac{bc - ad}{cx + d}\,.$$

Par suite, h est constante si $ad = bc$, et sinon la courbe de h est, à transformation affine $(x, y) \mapsto (cx + d, (cy - c)/(bc - ad)$ près, celle du cas $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$, correspondant à la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$.

Citons encore les fonctions *exponentielle*, *logarithme*, *sinus* et *cosinus*, que l'on construira à la fin de ce chapitre.

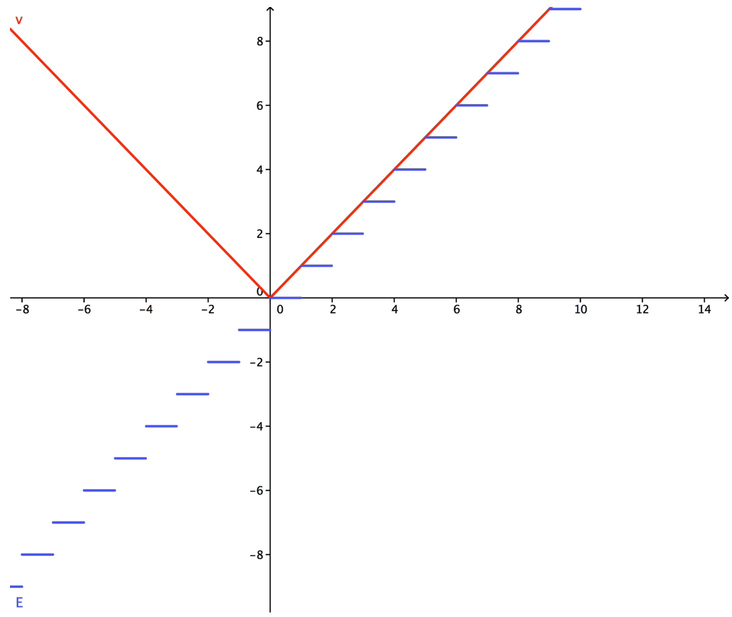

FIG. III.3 – Courbes des fonctions partie entière et valeur absolue.

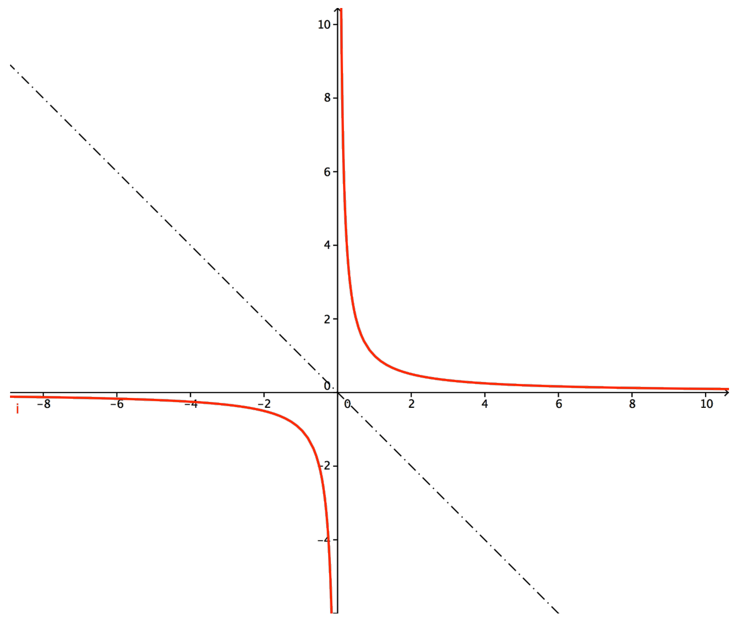

FIG. III.4 – Courbe de la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$.

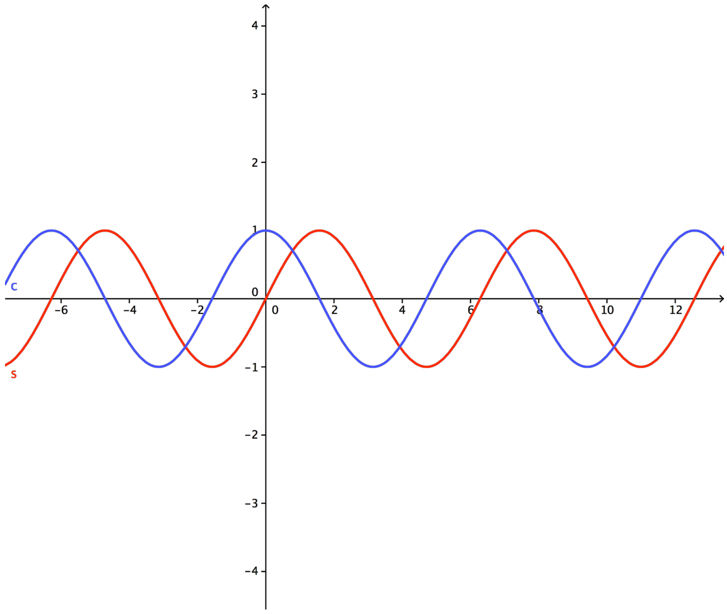

FIG. III.5 – Courbes des fonctions cosinus et sinus.

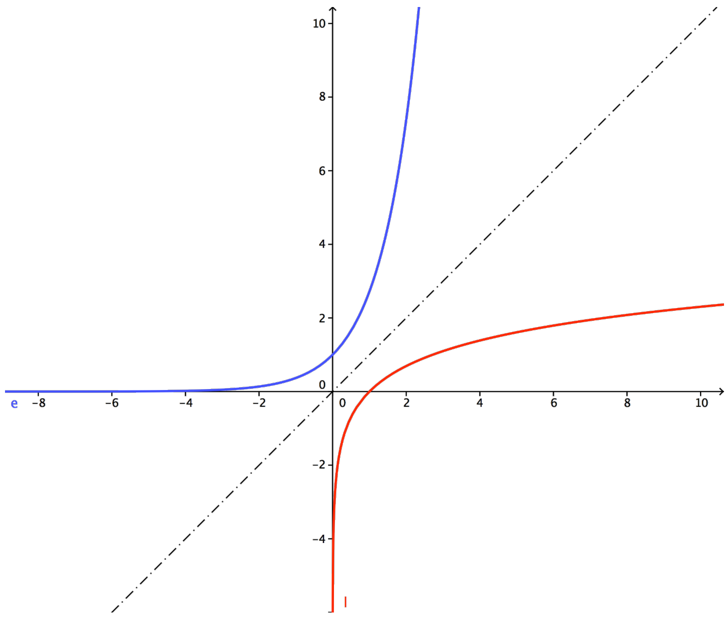

FIG. III.6 – Courbes des fonctions exponentielle et logarithme.

1.3 Fonctions monotones

Définition III.4 *On dit qu'une fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est dite

- **croissante** *si et seulement si,*

$$\forall x\,,\ y \in D\,, \quad x \le y \quad \Rightarrow f(x) \le f(y)\,,$$

- **décroissante** *si et seulement si,*

$$\forall x\,,\ y \in D\,, \quad x \le y \quad \Rightarrow f(x) \ge f(y)\,.$$

- **strictement croissante** *si et seulement si,*

$$\forall x\,,\ y \in D\,, \quad x < y \quad \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- **strictement décroissante** *si et seulement si,*

$$\forall x\,,\ y \in D\,, \quad x < y \quad \Rightarrow f(x) > f(y)\,.$$

Une fonction (strictement) croissante ou décroissante est dite (strictement) **monotone***.*

On observe qu'une fonction strictement monotone est nécessairement injective. Attention, la réciproque est évidemment fausse.

2 Limites

2.1 Définitions

Définition III.5 *Soit $D \subset \mathbb{R}$. Un point $a \in \mathbb{R}$ est dit adhérent à D si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in D$ tel que $|x - a| \le \varepsilon$. De façon équivalente, il existe une suite (x_n) d'éléments de D convergeant vers a.*

Définition III.6 *Soit une fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & A \\ x & \mapsto & f(x)\,, \end{array}$$

et a un point adhérent à D. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ au point a si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D\,, \quad |x - a| \le \eta \quad \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \varepsilon\,.$$

On dit que f a pour limite $+\infty$ au point a si et seulement si, pour tout $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D\,, \quad |x-a| \leq \eta \quad \Rightarrow f(x) \geq M\,.$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ au point a si et seulement si, pour tout $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D\,, \quad |x-a| \leq \eta \quad \Rightarrow f(x) \leq -M\,.$$

Lorsque D n'est pas majoré (respectivement pas minoré), on définit de façon analogue une limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$), en remplaçant l'expression « il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D\,,\ |x-a| \leq \eta$ » par « il existe $N > 0$ tel que $\forall x \in D\,,\ x \geq N$ » (respectivement « $\cdots x \leq -N$ »).

Définition III.7 *Soit une fonction*

$$\begin{array}{cccc} f\ : & D & \rightarrow & A \\ & x & \mapsto & f(x)\,, \end{array}$$

et a un point adhérent à $D\cap]-\infty, a[$. On dit que f a une **limite à gauche** *$\ell \in \mathbb{R}$ au point a si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\forall x \in D\,, \quad a-\eta \leq x < a \quad \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon\,.$$

De même , on dit que f a pour limite à gauche $+\infty$, respectively $-\infty$, au point a si et seulement si, pour tout $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D\,, \quad a-\eta \leq x < a \quad \Rightarrow f(x) \geq M\,,$$

respectivement,

$$\forall x \in D\,, \quad a-\eta \leq x < a \quad \Rightarrow f(x) \leq -M\,.$$

On définit de façon analogue la **limite à droite** *en un point b adhérent à $D\cap]b, +\infty[$: il suffit de remplacer $a-\eta \leq x < a$ par $b < x \leq b+\eta$ dans les relations ci-dessus.*

Proposition III.1 *Une fonction f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ en $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de son domaine de définition ayant pour limite a, la suite $(f(x_n))$ a pour limite ℓ. On a une caractérisation analogue avec les limites à droite et à gauche.*

2.2 Opérations sur les limites

Grâce à la proposition III.1, on déduit de la proposition II.4 sur les limites de suites des résultats analogues sur les sommes et produits de limites de fonctions ; de même sur le passage à la limite dans les inégalités (cf Proposition II.3).

Proposition III.2 (composition de limites) *Si une fonction f a pour limite ℓ en a, et si F a pour limite L en ℓ, alors $F \circ f$ a pour limite L en a.*

2.3 Limites et monotonie

Proposition III.3 *Soit une fonction f* croissante *de domaine de définition D et a un point adhérent à $]-\infty, a[\cap D$. Si la restriction de f à $]-\infty, a[\cap D$, notée $f|_{]-\infty,a[\cap D}$, n'est pas majorée alors*

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = +\infty ,$$

tandis que si $f|_{]-\infty,a[\cap D}$ est majorée, elle admet une limite finie :

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \sup \{ f(x) \,;\, x < a \} .$$

De façon analogue, si b est un point adhérent à $]b, +\infty[\cap D$, si $f|_{]b,+\infty[\cap D}$, n'est pas minorée alors

$$\lim_{x \searrow b} f(x) = -\infty ,$$

tandis que si $f|_{]b,+\infty[\cap D}$ est minorée, elle admet une limite finie :

$$\lim_{x \searrow b} f(x) = \inf \{ f(x) \,;\, x > b \} .$$

2.4 Critère de Cauchy

Comme pour les suites, le critère de Cauchy permet de caractériser l'existence d'une limite finie pour une fonction : il est très utile lorsqu'on n'a aucune idée *a priori* de la valeur de cette limite.

Définition III.8 *Soit une fonction*

$$\begin{array}{rccl} f : & D & \to & A \\ & x & \mapsto & f(x) , \end{array}$$

et a un point adhérent à D. On dit que f satisfait le critère de Cauchy au point a lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in D , \quad |x - a| \leq \eta \text{ et } |y - a| \leq \eta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon .$$

De façon analogue, si D n'est pas majoré, on dit que f satisfait le critère de Cauchy en $+\infty$ lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x, y \in D , \quad x \geq m \text{ et } y \geq m \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon ;$$

si D n'est pas minoré, on dit que f satisfait le critère de Cauchy en $+\infty$ lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x, y \in D , \quad x \leq -m \text{ et } y \leq -m \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon .$$

Théorème III.1 *Si une fonction f admet une limite finie en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy en a.*

Dém. Le sens facile, comme pour les suites, consiste à appliquer la définition de la convergence vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et à utiliser l'inégalité triangulaire. Pour montrer qu'une fonction satisfaisant le critère de Cauchy admet une limite finie, on commence par se ramener au cas d'une suite. Supposons pour fixer les idées $a \in \mathbb{R}$, le point a étant adhérent à D. Soit alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers a. Le critère de Cauchy pour la fonction f montre que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Soit ℓ sa limite. Alors la fonction f a pour limite ℓ au point a : c'est encore une affaire d'inégalité triangulaire ; en effet, pour tout $x \in D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f(u_n)| + |f(u_n) - \ell|,$$

où l'on peut majorer le premier terme par $\varepsilon/2$ en appliquant le critère de Cauchy à la fonction f et le second aussi par $\varepsilon/2$ en appliquant la définition de la limite de la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. □

3 Continuité

3.1 Définition

Définition III.9 *Une fonction f définie sur un intervalle I (non vide.) de $\mathbb{R}$ est dite* continue *en $a \in I$ si et seulement si elle a pour limite $f(a)$ au point a. Elle est dite* continue *sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.*

3.2 Théorèmes fondamentaux

Théorème III.2 *Soit f une fonction continue sur un intervalle* fermé et borné. *Alors il existe $c_- \in [a, b]$ et $c_+ \in [a, b]$ tels que*

$$\textit{pour tout } x \in [a, b], \quad f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+).$$

Dém. Il s'agit en fait de démontrer que f est majorée (resp. minorée) sur $[a, b]$ et qu'elle « atteint sa borne supérieure (resp. inférieure) » , c'est-à-dire que l'image de f admet un maximum (resp. minimum). Naturellement, il suffit de faire la démonstration pour la borne supérieure (le résultat sur la borne inférieure s'en déduisant en considérant la fonction $-f$). Supposons que f ne soit pas majorée : alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$. La suite (x_n) ainsi construite est bornée, donc admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass) : sa limite ℓ vérifie les inégalités larges $a \leq \ell \leq b$. Par continuité de f au point ℓ, on en déduit que la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(\ell)$. Or on a par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n)$, qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'où la contradiction. Ceci montre que f doit être majorée. L'image de f est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, qui admet par conséquent une borne supérieure M. On veut montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $M = f(c)$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $t_n \in [a, b]$ tel que $f(t_n) \geq M - 1/(n + 1)$. Par le même argument que précédemment, on en extrait une sous-suite convergente $(t_{\psi(n)})$, vers une limite c appartenant à $[a, b]$, telle que $(f(t_{\psi(n)}))$ converge vers $f(c)$. Comme par construction on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M - \frac{1}{n+1} \leq f(t_{\psi(n)}) \leq M \,,$$

on en déduit (par unicité de la limite) que $f(c) = M$. □

Voyons maintenant le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème III.3 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Autrement dit, si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors quels que soient a et b dans I avec $f(a) \neq f(b)$, et quel que soit v entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c entre a et b tel que $f(c) = v$.*

Dém. Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a < b$, et quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(a) < f(b)$. On veut montrer que pour tout $v \in]f(a), f(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = v$. Considérons l'ensemble

$$A := \{x \in [a, b[\,;\ f(x) < v\}\,.$$

Il est non vide car il contient a, et majoré par b, donc il admet une borne supérieure $c \in [a, b] \subset I$. On va montrer que c répond à la question. On sait déjà que $f(c) \leq v$: en effet, il existe une suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers c, et l'on obtient la majoration voulue en passant à la limite dans l'inégalité $f(x_n) < v$. Par suite, $c < b$ (puisque $f(b) > v$ par hypothèse). Pour prouver qu'en fait $f(c) = v$, raisonnons par l'absurde, et supposons $f(c) < v$. Puisque $c < b$, il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in [c, c + \eta_0[$, x appartient à l'intervalle I. Alors par continuité de f au point c, il existe $\eta \in]0, \eta_0[$ tel que pour tout

$$x \in [c, c+\eta[\quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| \leq \frac{v - f(c)}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \frac{v + f(c)}{2} < v\,.$$

Et donc $[c, c + \eta[\subset A$: ceci contredit le fait que c soit un majorant de A. En conclusion, on a donc bien $f(c) = v$. Et puisque $f(c) \neq f(a)$, $f(c) \neq f(b)$, on a forcément $c \neq a$ et $c \neq b$. □

Remarque III.2 *En combinant les deux théorèmes précédents, on voit que l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné !*

3.3 Continuité, monotonie, et bijectivité

Proposition III.4 *Si une fonction f monotone sur un intervalle I (non vide.) de $\mathbb{R}$ est telle que $f(I)$ est un intervalle, alors elle est continue.*

Dém. Il suffit de montrer que f est continue à gauche, car en appliquant ce résultat à la fonction $x \mapsto -f(-x)$ (qui a la même monotonie que f) on en déduira que f est aussi continue à droite. De plus, on peut supposer que f est croissante (si ce n'était pas le cas, on considèrerait la fonction $-f$ au lieu de f.) Soit donc un point x de I, qui ne soit pas la borne inférieure de

I. Puisque f est croissante, la fonction $f|_{I\cap]-\infty,x[}$ est croissante et majorée par $f(x)$, et admet donc une limite à gauche

$$\ell = \sup_{t\in I\cap]-\infty,x[} f(t) \leq f(x)\,.$$

On veut montrer que $\ell = f(x)$. Pour cela on raisonne par l'absurde. Supposons $\ell < f(x)$. Alors $m := (\ell + f(x))/2 \in]\ell, f(x)[$ et pour tout $t \in I\cap] - \infty, x[$ (intervalle non vide) on a $f(t) \leq \ell < m$: ainsi, $m \in]f(t), f(x)[$ avec $m \notin f(I\cap]-\infty, x[)$ par définition de ℓ, et comme f est croissante m n'appartient pas non plus à $f(I \cap [x, +\infty[)$; ceci montre que que $m \notin f(I)$ et contredit par conséquent le fait que $f(I)$ soit un intervalle. □

Proposition III.5 *Une fonction injective* et *continue sur un intervalle I (non vide) de $\mathbb{R}$ est nécessairement strictement monotone.*

Dém. On va commencer par démontrer que la restriction de f à tout ensemble constitué de trois points (seulement) est strictement monotone. Soient donc trois points x_1, x_2 et x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x_2)$ n'est pas entre $f(x_1)$ et $f(x_3)$. Pour fixer les idées, supposons

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)\,.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = f(x_3)$: ceci contredit évidemment l'injectivité de f. De même, la restriction de f à tout ensemble constitué de quatre points est strictement monotone. Soient en effet $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Supposons par exemple $f(x_2) < f(x_3)$. Alors d'après le point précédent appliqué aux triplets $\{x_1, x_2, x_3\}$ et $\{x_2, x_3, x_4\}$ respectivement, on a $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ et $f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$, et ainsi $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$. (Évidemment, si l'on avait supposé $f(x_2) > f(x_3)$ on aurait obtenu les inégalités opposées.) On peut maintenant conclure. Fixons $\alpha < \beta$ dans I et supposons $f(\alpha) < f(\beta)$. Soient x et y dans I, avec $x < y$. En appliquant le point précédent au quadruplet $\{\alpha, \beta, x, y\}$ on en déduit que (quelles que soient les positions de x et y par rapport à α et β) nécessairement $f(x) < f(y)$. C'est donc que f est strictement croissante. Si au contraire $f(\alpha) > f(\beta)$, on obtient évidemment de la même façon que f strictement décroissante. □

Théorème III.4 *Soit f une fonction injective* et *continue sur un intervalle I (non vide) de $\mathbb{R}$. Soient alors $J = f(I)$ et*

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & I & \to & J \\ & x & \mapsto & \widetilde{f}(x) := f(x)\,. \end{array}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est bijective et sa fonction réciproque est continue.

Dém. La fonction $\widetilde{f}$ est injective puisque f l'est, et surjective par construction, donc bijective. De plus, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle. D'après la proposition III.5, la fonction f, et donc $\widetilde{f}$ est strictement monotone. Par suite, la fonction réciproque $\widetilde{f}^{-1}$ est monotone, et son image I est un intervalle. Donc d'après la proposition III.4, $\widetilde{f}^{-1}$ est continue. □

4 Dérivabilité

Définition III.10 *Soit f une fonction définie sur un domaine D et $a \in D$, adhérent à D. On dit que f est dérivable au point a si la fonction* **taux d'accroissement**, *définie par*

$$\begin{array}{rcl} D\backslash\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\,, \end{array}$$

a une limite finie au point a. Si c'est le cas, cette limite est notée $f'(a)$, ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Proposition III.6 *Si une fonction est dérivable en un point, elle est nécessairement continue en ce même point.*

Dém. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, considérons la fonction

$$\begin{array}{rrcl} \delta_a(x) : & D\backslash\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \; - \; f'(a)\,. \end{array}$$

Elle a pour limite 0 au point a. Or, pour tout $x \in D$, $x \neq a$,

$$f(x) \;=\; f(a) \;+\; (x-a)\,f'(a) \;+\; (x-a)\,\delta_a(x)\,.$$

On en déduit par les opérations élémentaires sur les limites que f a pour limite $f(a)$ au point a. $\square$

Définition III.11 *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite dérivable à gauche, respectivement à droite, en a si la fonction $f|_{]-\infty,a[\cap D}$, respectivement $f|_{]a,+\infty[\cap D}$, est dérivable en a. Une fonction est dite dérivable sur un intervalle I (non vide) si elle est dérivable en tout point de cet intervalle. Sa fonction dérivée est définie par*

$$\begin{array}{rrcl} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x)\,, \end{array}$$

Exemples

i). Fonctions constantes : la fonction taux d'accroissement d'une fonction constante est identiquement nulle ; donc toute fonction constante est dérivable partout, de dérivée identiquement nulle.

ii). Fonction *partie entière* : pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, la fonction E est constante dans un intervalle ouvert non vide contenant x, donc elle est dérivable en x et $E'(x) = 0$; attention, la fonction E n'est pas dérivable, ni même continue, aux points entiers !

iii). Fonction *identité* : la fonction taux d'accroissement de la fonction $\mathrm{id} : x \mapsto x$ est identiquement égale à 1 ; donc Id est dérivable partout, et pour tout x, $\mathrm{id}'(x) = 1$.

iv). Fonction *puissance* : pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction

$$p_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n . \end{array}$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $p_n'(x) = n\, p_{n-1}(x)$. En effet, pour $x \neq a$,

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k\, a^{n-k-1} \to n\, a^{n-1}$$

lorsque $x \to a$.

v). Fonction *exponentielle* : on démontrera plus loin que la fonction exponenielle est insensible à dérivation.

4.1 Dérivation et sens de variation

Proposition III.7 *Si une fonction est dérivable et croissante (resp. décroissante), sa dérivée est à valeurs positives (resp. négatives) ou nulles.*

Dém. Si f est croissante, alors pour tout x, a, on a

$$x > a \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0\,,$$

$$x < a \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0\,,$$

d'où $f'(a) \geq 0$ en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus sur le taux d'accroissement. La preuve est analogue si f est décroissante. □

Inversement, si f est dérivable et $f' \geq 0$ alors f est croissante : cependant la démonstration de ce résultat nécessite le théorème des accroissements finis, que l'on verra plus loin.

Définition III.12 *On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet un* **minimum local** *en un point $a \in D$ lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\forall x \in D\,,\ |x-a| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(a)\,.$$

De façon analogue, f admet un **maximum local** *en un point $a \in D$ lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\forall x \in D\,,\ |x-a| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(a)\,.$$

On dit que f admet un **extremum local** *en a si elle admet un minimum local* ou *un maximum local en a.*

Proposition III.8 *Si $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle* ouvert *non vide, admet un extremum local en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$.*

Dém. Supposons pour fixer les idées que f admette un minimum local en a. L'hypothèse I ouvert est cruciale : elle assure en effet que les ensembles

$$\{x \in I\,;\; a-\eta \le x < a\} \quad \text{et} \quad \{x \in I\,;\; a < x \le a+\eta\}$$

sont non vides. Or dans le premier, on a, pour η choisi comme dans la définition III.12

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0\,,$$

et dans le second,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0\,.$$

La première inégalité montre que la limite à gauche en a du taux d'accroissement de f est négative ou nulle et la seconde que la limite à droite est positive ou nulle. Comme ces limites à gauche et à droite sont toutes deux égales à $f'(a)$, on en déduit $f'(a) = 0$. □

Opérations sur les dérivées

Proposition III.9 *Si f et g sont dérivables en a alors les fonctions $f+g$ et fg aussi, et*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,, \quad (fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)\,.$$

Si de plus $g(a) \neq 0$ alors f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Dém. Le cas de la somme est trivial (le taux d'accroissement de $f+g$ étant exactement celui de f plus celui de g). Les cas du produit et du quotient demandent un petit calcul, et utilisent la proposition III.6 (dérivabilité implique continuité). Pour le produit, on écrit par exemple :

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,,$$

où l'on reconnaît les taux d'accroissements de f et de g ; en utilisant la continuité de f en a et les propriétés sur les produits de limites, on en déduit la dérivabilité de fg et la formule voulue. Pour le quotient, on peut se ramener $f \equiv 1$ grâce au résultat sur le produit. En écrivant

$$\frac{(1/g)(x) - (1/g)(a)}{x-a} = \frac{g(a)-g(x)}{g(x)\,g(a)\,(x-a)}\,,$$

ce qui a pour limite $-g'(a)/g(a)^2$ grâce à la dérivabilité, et donc aussi la continuité, de g en a et aux propriétés sur les produits et quotients de limites. □

Proposition III.10 *Si $f : I \to J$ est dérivable en $a \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable en $b = f(a) \in J$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)\,.$$

Autrement dit, si f est dérivable sur I et gest dérivable sur J, $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\; f'\,.$$

Si par ailleurs f est bijective, continue sur I et telle que $f'(a) \neq 0$, sa fonction réciproque est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Autrement dit, si f est bijective sur I et si sa dérivée ne s'annule pas, f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}\,.$$

Théorèmes fondamentaux

Théorème III.5 (Rolle) *Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Dém. Si f est constante, on a $f'(c) = 0$ pour tout c et il n'y a donc rien à démontrer. Supposons maintenant f non constante. D'après le théorème III.2, la fonction f admet un minimum et maximum (globaux). Puisqu'elle n'est pas constante, l'un des deux au moins est différent de la valeur $y := f(a) = f(b)$. Supposons que ce soit le maximum. Cela veut dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(c)$ et $f(c) > y$, donc en fait $c \in]a, b[$. D'après la proposition III.8, cela implique $f'(c) = 0$. □

Corollaire III.1 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I (non vide) et si sa dérivée est à valeurs strictement positives, alors f est strictement croissante.*

Dém. Grâce au théorème de Rolle (théorème III.5), on peut déduire des hypothèses que f est injective : en effet, s'il existait a, $b \in I$ tel que $a \neq b$ et $f(a) = f(b)$, alors comme f est dérivable (donc continue) sur $[a, b]$, on aurait un point $c \in]a, b[\subset I$ où f' s'annule. Donc d'après la proposition III.5, f est strictement monotone. Et d'après la proposition III.7, elle est nécessairement strictement croissante (car si elle était décroissante, sa dérivée serait à valeurs négatives). □

Attention, la réciproque est fausse : une fonction peut très bien être strictement croissante et sa dérivée s'annuler (c'est le cas par exemple de toutes les fonctions puissance d'ordre impair au moins égal à 3, dont les dérivées s'annulent en 0).

Un autre corollaire, et qui généralise en fait le théorème de Rolle est le théorème dit des accroissements finis.

Théorème III.6 (Accroissements finis) *Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dém. Si l'on note $\gamma := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on peut considérer la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - \gamma(x - a).$$

Elle est, comme f, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Et par construction elle vérifie $g(b) = g(a) = f(a)$. Donc sa dérivée

$$g' : x \mapsto f'(x) - \gamma$$

s'annule en un point c de $]a, b[$. □

Les applications du théorème des accroissements finis sont innombrables. Commençons par la plus élémentaire.

Proposition III.11 *Une fonction dérivable sur un intervalle et dont la dérivée est à valeurs positives (resp. négatives) ou nulles est croissante (resp. décroissante). Une fonction dérivable sur un intervalle et dont la dérivée est nulle constante.*

C'est essentiellement pour les résultats du type suivant que l'on a pris la peine de supposer f dérivable seulement sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ dans les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

Proposition III.12 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et dérivable sur $I \backslash \{a\}$, supposé non vide. On suppose que sa dérivée f' admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ au point a. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.*

Dém. Si $I \backslash \{a\}$ est non vide, il existe $\eta_0 > 0$ tel que l'un au moins des intervalles $[a - \eta_0, a[$ et $]a, a + \eta_0]$ soient inclus dans I. Supposons par exemple $[a - \eta_0, a[\subset I$ et considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a - \eta_0, a[$ qui converge vers a. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]x_n, a[$ tel que

$$f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

D'après le théorème des gendarmes, la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite a, et comme f' a pour limite ℓ en a, on en déduit que la suite $(f'(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ. Par conséquent, d'après la proposition III.1 (caractérisation séquentielle des limites), le taux d'accroissement de f a pour limite à gauche ℓ en a. On obtient de même sa limite à droite si $]a, a + \eta_0] \subset I$. Cela démontre que f est dérivable en a et de dérivée ℓ. □

Attention, la dérivée d'une fonction f n'a pas toujours pour limite $f'(a)$ en un point a. Autrement dit, la dérivée d'une fonction dérivable n'a pas de raison d'être continue !

Une application du théorème des accroissements finis dans le même ordre d'idée que la précédente est une version raffinée de la règle de l'Hospital. En fait, dans sa version la plus « fine » elle utilise le théorème des accroissements finis généralisé suivant

Théorème III.7 (Accroissements finis généralisé) *Soit deux fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$, continues sur $[a,b]$, et dérivables sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) \,-\, (g(b) - g(a))\, f'(c) \,=\, 0\,.$$

Dém. Comme le théorème III.6, c'est un corollaire du théorème de Rolle (théorème III.5), appliqué à la fonction

$$x \,\mapsto\, (f(b) - f(a))\,(g(x) - g(a)) \,-\, (g(b) - g(a))\,(f(x) \,-\, f(a))\,,$$

qui vaut évidemment 0 en a et b, et dont la dérivée est

$$x \,\mapsto\, (f(b) - f(a))\, g'(x) \,-\, (g(b) - g(a))\, f'(x) \,=\, 0\,.$$

□

Proposition III.13 (L'Hospital) *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I supposé non vide, dérivables sur $I \backslash \{a\}$, telles que $f(a) = g(a) = 0$ et g' ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$. On suppose en outre que f'/g' a une limite finie ℓ en a. Alors la fonction f/g a pour limite ℓ au point a.*

Dém. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite déléments de $I \backslash \{a\}$ convergeant vers a. D'après le théorème des accroissements finis généralisé appliqué à f et g,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \,=\, \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}\,,$$

avec c_n dans l'intervalle ouvert d'extrémités a et x_n : la suite (c_n) a donc pour limite a. La suite $(f'(c_n)/g'(c_n))$ a donc pour limite ℓ. On conclut à nouveau grâce à la proposition III.1. □

Remarque III.3 *La version élémentaire de la règle de l'Hospital, lorsque f et g sont dérivables en a avec $g'(a) \neq 0$, ne nécessite pas le théorème des accroissements finis !*

5 La fonction exponentielle

5.1 Exponentielle

Le but de ce paragraphe est de construire la fonction exponentielle (sur $\mathbb{R}$) de manière élémentaire (en utilisant quelques outils des cours précédents), et de démontrer ses propriétés essentielles :

(P) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \,>\, 0$.

(A) pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a + b) \,=\, \exp(a)\, \exp(b)$,

(D) la fonction $\exp$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) \,=\, \exp(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, considérons la suite de terme général

$$u_n \;=\; \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n ,$$

pour $n \geq 1$.

Lemme III.1 *Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $N > -x$. Alors pour tout $n \geq N$,*

$$u_{n+1} \;\geq\; u_n \, .$$

De plus, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$u_n \;\leq\; M \, .$$

Dém. C'est assez astucieux et demande de faire varier un peu x. C'est pourquoi on notera plutôt

$$u_n(x) \;=\; \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Pour le premier point (croissance de la suite à partir du rang N), on passe par une étape intermédiaire, qui consiste à démontrer que pour tout $h \in]-1, +\infty[$ et pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1}(x+h) \;\geq\; (1+h)\, u_n(x) \, ,$$

On en déduira ensuite le résultat voulu en appliquant cette inégalité à $h = 0$. Soit donc la fonction

$$\begin{array}{rcl} f \;:\;]-1,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & f(h) \;:=\; u_{n+1}(x+h) \;-\; (1+h)\, u_n(x) \\ & & \quad\;\; = \; \left(1 + \dfrac{x+h}{n+1}\right)^{n+1} \;-\; (1+h) \; \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n . \end{array}$$

Elle dérivable et pour tout $h \in]-1, +\infty[$,

$$f'(h) \;=\; \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^n \;-\; \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll} \forall h > x/n \, , \;\; \dfrac{x+h}{n+1} \;>\; \dfrac{x}{n} & \Rightarrow f'(h) \;>\; 0 \, , \\ \forall h < x/n \, , \;\; \dfrac{x+h}{n+1} \;<\; \dfrac{x}{n} & \Rightarrow f'(h) \;<\; 0 \, , \end{array}$$

et

$$f(x/n) \;=\; \left(1 + \frac{x + x/n}{n+1}\right)^{n+1} \;-\; (1 + x/n) \; \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \;=\; 0 \, .$$

(Noter que pour $n > -x$, $x/n \in]-1, +\infty[$.) Donc la fonction f admet un minimum global égal à 0 en $h = x/n$. L'inégalité $f(0) \geq 0$ est ce que l'on voulait.

Pour démontrer que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée (indépendamment de n mais pas de x, attention), on utilise l'identité remarquable suivante :

$$u_n(x)\,u_n(-x) \;=\; \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n ,$$

qui implique évidemment l'inégalité $u_n(x)\,u_n(-x) \;\le\; 1$. Or la suite $(u_n(-x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs positives à partir du rang $P := E(x)+1$. On en déduit que pour tout $n \;>\; P$,

$$u_n(x) \;\le\; \frac{1}{u_P(-x)}\,.$$

Ceci prouve bien que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par $\max(1/u_P(-x), \max_{1\le n\le N} u_n(x))$). □

D'après le lemme précédent, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Définition III.13 *La fonction exponentielle est donnée par*

$$\begin{array}{rcl} \exp : \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n . \end{array}$$

On déduit immédiatement de cette définition que

$$\exp(0) \;=\; 1\,,$$

($\exp(0)$ étant la limite d'une suite constamment égale à 1) et

$$(\mathbf{P}) \qquad \text{pour tout } \ x\in\mathbb{R}, \quad \exp(x) \;>\; 0\,.$$

En effet, pour $n \ge N \;>\; -x$,

$$u_n(x) \;\ge\; u_N(x) \;=\; \left(1+\frac{x}{N}\right)^N \;>\; 0$$

donc à la limite,

$$\exp(x) \;\ge\; u_N(x) \;=\; \left(1+\frac{x}{N}\right)^N \;>\; 0\,.$$

Pour prouver la propriété algébrique **(A)**, il faut étudier le rapport

$$\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(a+b)} \;=\; \left(1 \,+\, \frac{ab}{n^2+n(a+b)}\right)^n .$$

Lemme III.2 *Pour tous α, $\beta\in\mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 \,+\, \frac{\alpha}{n^2+\beta n}\right)^n \;=\; 1\,.$$

Dém. Par la formule du binôme de Newton, on a

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n^2 + \beta n}\right)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\alpha^k}{n^k (n+\beta)^k}\,,$$

et, pour $n > |\beta|$, on peut majorer brutalement la valeur absolue de cette somme par

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\alpha|^k}{(n-|\beta|)^k} = \frac{|\alpha|}{(n-|\beta|)} \, \frac{1 - |\alpha|^n/(n-|\beta|)^n}{1 - |\alpha|/(n-|\beta|)}\,,$$

d'après la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique. Enfin, pour $n > |\alpha| + |\beta|$,

$$\frac{|\alpha|}{(n-|\beta|)} \, \frac{1 - |\alpha|/(n-|\beta|)^n}{1 - |\alpha|/(n-|\beta|)} \le \frac{|\alpha|}{(n-|\beta|)} \, \frac{1}{1 - |\alpha|/(n-|\beta|)}\,,$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. $\square$

En appliquant le lemme à $\alpha = ab$ et $\beta = a + b$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n(a)\, u_n(b)}{u_n(a+b)} = 1\,,$$

d'où **(A)**. D'après cette propriété on a en particulier, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

Pour démontrer la propriété analytique **(D)**, on va maintenant démontrer des inégalités fondamentales sur $\exp$.

Lemme III.3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$1 + x \le \exp(x) \le 1 + x \exp(x)\,.$$

Dém. Les inégalités annoncées sont trivialement vraies pour $x = 0$, puisque $\exp(0) = 1$. Il est amusant de noter que si elles le sont pour $x > 0$, elles entraînent automatiquement les mêmes inégalités pour $x < 0$: en effet, si $x < 0$, on a évidemment $-x > 0$, et en multipliant

$$1 - x \le \exp(-x) \le 1 - x \exp(-x)$$

par $\exp(x) > 0$, on obtient précisément

$$1 + x \le \exp(x) \le 1 + x \exp(x)\,.$$

Il suffit donc de démontrer ces inégalités pour $x > 0$. Celle de gauche est facile à obtenir (elle n'est autre que l'inégalité de Bernoulli, cf Proposition I.6, appliquée au point x/n), car pour tout $n \ge 2$,

$$u_n(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \ge 1 + x\,,$$

d'où l'inégalité voulue en passant à la limite $n \to +\infty$. Quant à l'inégalité de droite, elle s'obtient aussi grâce à la formule du binôme en écrivant

$$1 + xu_n(x) \;=\; 1 \;+\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{n^k}$$

$$=\; 1 \;+\; \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \frac{x^j}{n^{j-1}} \;=\; 1 \;+\; \sum_{j=1}^{n} n \binom{n}{j-1} \frac{x^j}{n^j} \;+\; \frac{x^{n+1}}{n^n}\,,$$

où l'on peut minorer brutalement la somme par

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{x^j}{n^j}\,,$$

d'où

$$1 + xu_n(x) \;\geq\; u_n(x) \;+\; \frac{x^{n+1}}{n^n} \;\geq\; u_n(x)\,,$$

et à la limite

$$1 + x\;\exp(x) \;\geq\; \exp(x)\,.$$

$\square$

Le lemme précédent montre tout d'abord que, pour $|x| < 1$,

$$1 \;+\; x \;\leq\; \exp(x) \;\leq\; \frac{1}{1 - |x|}\,,$$

et donc (par le théorème des gendarmes) $\exp$ a pour limite 1 en 0 : elle est par conséquent continue en ce point. De plus, le même lemme montre que

$$1 \;\leq\; \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \;\leq\; \exp(x)\,,$$

et donc que $\exp$ est dérivable en 0 de dérivée 1. Enfin, pour tout $a \in \mathbb{R}$, d'après la propriété **(A)**,

$$\frac{\exp(x) - \exp(a)}{x - a} \;=\; \exp(a)\,\frac{\exp(x-a) - \exp(0)}{x - a}\,,$$

ce qui tend vers $\exp(a)$ lorsque x tend vers a (d'après le cas $a = 0$) et donc $\exp$ est dérivable en a de dérivée $\exp(a)$. Ceci prouve la propriété (D).

En prime, l'inégalité $1 + x \;\leq\; \exp(x)$ montre que

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) \;=\; +\infty\,,$$

et comme $\exp(-x) \;=\; 1/\exp(x)$ on en déduit

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) \;=\; 0\,.$$

Pour résumer, la fonction $\exp$ est strictement croissante, de limite nulle en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Son graphe est complètement au dessus de sa tangente en 0 (d'équation $y \;=\; 1 + x$), et en fait au dessus de sa tangente tout point a (d'équation $y \;=\; \exp(a) + (x - a)\exp(a)$) : ceci montre que c'est une fonction **convexe**.

5.2 Logarithme

La fonction $\exp$ (construite au paragraphe précédent) étant strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image, qui est exactement $\mathbb{R}^{+*}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Sa fonction réciproque, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, est notée $\ln$: c'est le **logarithme néperien**. Par construction, on a

$$\forall t > 0\,, \quad \exp(\ln(t)) \,=\, t\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \ln(\exp(x)) \,=\, x\,.$$

En particulier, $\ln(1) \,=\, \ln(\exp(0)) \,=\, 0$. Puisque la dérivée de $\exp$ est $\exp$ elle-même, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, sa fonction réciproque $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et sa dérivée est telle que, pour tout $t > 0$,

$$\ln'(t) \,=\, \frac{1}{\exp'(\ln(t))} \,=\, \frac{1}{\exp(\ln(t))} \,=\, \frac{1}{t}\,.$$

Enfin, le graphe de $\ln$ est symétrique de celui de $\exp$ par rapport à la première bissectrice. La fonction $\ln$ est **concave**.

5.3 Exponentielle complexe

On admettra que la méthode de construction du paragraphe 5.1 permet de définir aussi $\exp(z) \in \mathbb{C}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, de sorte que

- pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$|\exp(z)| \,=\, \exp(\mathsf{Re}\, z)\,,$$
- pour tous z, $w \in \mathbb{C}$,
$$\exp(z + w) \,=\, \exp(z)\, \exp(w)\,,$$
- pour tout $z \in \mathbb{C}$, les fonctions $R_z : t \mapsto \mathsf{Re}\exp(zt)$ et $I_z : t \mapsto \mathsf{Im}\exp(zt)$ sont dérivables en tout point $t \in \mathbb{R}$, et donc la fonction $R_z + iI_z : t \mapsto \exp(zt) \in \mathbb{C}$ aussi, avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(zt) \,=\, z\, \exp(zt)\,.$$

En particulier, si l'on introduit (pour $z = i$)

$$\cos(t) \,:=\, \mathsf{Re}\exp(it) \quad \text{et} \quad \sin(t) \,:=\, \mathsf{Im}\exp(it)\,,$$

on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(it) \,=\, i\, \exp(it)\,,$$

ce qui signifie

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \qquad \cos'(t) \,=\, -\sin(t)\,, \quad \sin'(t) \,=\, \cos(t)\,.$$

Chapitre IV

Équations différentielles

1 Qu'est-qu'une équation différentielle ?

Une *équation différentielle* est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, disons $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$: une fonction φ est solution d'une équation différentielle dite d'ordre 1 si elle est dérivable sur un intervalle ouvert non vide J et telle qu'en tout point $t \in J$, la valeur de la fonction, $\varphi(t)$, celle de sa dérivée, $\varphi'(t)$, et éventuellement t, satisfont la relation prescrite par l'équation.

Souvent, on écrit l'équation différentielle avec une notation « générique » pour la fonction inconnue, par exemple u, et on réserve une autre notation, par exemple φ, pour les solutions.

L'équation différentielle la plus simple est

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0\,. \tag{1.1}$$

D'après la proposition III.11, les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions du type $\varphi \equiv$ constante !

Dans le même style, on peut considérer les équations différentielles du type

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a\,u\,, \tag{1.2}$$

où a est un réel donné. Ceci fournit un modèle mathématique rudimentaire pour les phénomènes à *taux de croissance* (ou de décroissance) constant, comme la croissance d'une population aux ressources illimitées... (on parle de croissance *Malthusienne*). D'après nos connaissances sur l'exponentielle, on sait que la fonction $t \mapsto \exp(at)$ est une solution particulière de (1.2). Il est alors facile de trouver toutes les solutions de (1.2), car on peut en fait se ramener à l'équation (1.1) (correspondant au cas $a = 0$) : en effet, si φ est une solution de (1.2) sur un intervalle J, considérons la fonction

$$\psi : t \in J \mapsto \psi(t) := \varphi(t)\,\exp(-at)\,.$$

On calcule facilement sa dérivée :

$$\psi'(t) = \varphi'(t)\,\exp(-at) - a\,\varphi(t)\,\exp(-at) = (\varphi'(t) - a\varphi(t))\,\exp(-at) = 0\,.$$

Autrement dit, ψ est une solution de (1.1) et donc constante ! Réciproquement, si φ est de la forme

$$\varphi(t) \;=\; c \, \exp(at)\,,$$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire, c'est évidemment une solution de (1.2). En conclusion, toutes les solutions de (1.2) sont de la forme

$$\varphi(t) \;=\; c \, \exp(at)\,.$$

Remarque IV.1 *Si φ est une solution de* (1.2) *et $\tau > 0$ (un temps d'échantillonage), la suite de terme général*

$$u_n \;:=\; \varphi(n\tau)\,,$$

est une suite géométrique de raison de $\exp(a\tau)$.

Une équation différentielle admet une infinité de solutions, comme on le voit sur l'exemple de (1.2). Pour obtenir une solution unique il faut se donner une *condition initiale*. On peut ainsi préciser le résultat du calcul ci-dessus.

Proposition IV.1 *Soient a, t_0 et $u_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction dérivable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle* (1.2) *et telle que $\varphi(t_0) \;=\; u_0$.*

Dém. On a vu qu'une solution φ de (1.2) était nécessairement de la forme

$$\varphi(t) \;=\; c \, \exp(at)\,.$$

Il suffit donc de déterminer c en fonction de la condition « initiale » . Or $\varphi(t_0) \;=\; c \, \exp(at_0)$ implique évidemment $c \;=\; \varphi(t_0) \, \exp(-at_0)$. Ainsi, la solution de (1.2) telle que $\varphi(t_0) \;=\; u_0$ est donnée par

$$\varphi(t) \;=\; u_0 \, \exp(-at_0) \, \exp(at) \;=\; u_0 \, \exp(a(t-t_0))\,.$$

□

Il existe bien entendu des équations différentielles beaucoup plus compliquées que (1.2), à commencer par des équations dites à coefficients variables, comme celles étudiées au paragraphe suivant.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition IV.1 *On appelle* équation différentielle linéaire d'ordre 1 *une équation différentielle de la forme*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \;=\; a(t)\,u \;+\; b(t)\,, \tag{2.3}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert non vide I. L'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \;=\; a(t)\,u\,, \tag{2.4}$$

est l'équation homogène *associée à* (2.3).

On admettra ici que toute fonction continue sur un intervalle I peut s'exprimer comme la dérivée d'une fonction dérivable sur I, c'est-à-dire qu'elle admet une *primitive*. (Ceci sera démontré dans les éléments de calcul intégral au prochain semestre.)

Définition IV.2 *Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si F est dérivable et de dérivée f/*

On va commencer par montrer que les solutions de (2.4) s'expriment explicitement à l'aide de la fonction A, dont la dérivée est a. Pour cela on imite le calcul fait au paragraphe précédent avec a constant. Si φ est une solution de (2.4) sur un intervalle J, considérons la fonction

$$\psi : t \in J \mapsto \psi(t) := \varphi(t)\ \exp(-A(t)t)\,.$$

Alors on a

$$\psi'(t) \;=\; \varphi'(t)\ \exp(-A(t)) - \varphi(t)\,A'(t)\ \exp(-A(t)) \;=\; (\varphi'(t) - a(t)\varphi(t))\ \exp(-A(t)) \;=\; 0\,.$$

Donc ψ est constante. Soient alors t_0 et $t \in J$. En écrivant que $\psi(t)$ et $\psi(t_0)$ coïncident, on obtient la formule de résolution de (2.4) :

$$\varphi(t) \;=\; \varphi(t_0)\ \exp(A(t) - A(t_0))\,.$$

On résume ce résultat en disant que la solution générale de (2.4) est

$$c\ \exp(A(t))\,,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire (à déterminer en fonction d'une condition initiale).

On peut ensuite s'attaquer à la résolution de l'équation (2.3). La méthode consiste, selon une expression curieuse, à « faire varier la constante » . Autrement dit, on cherche une solution sous la forme

$$\varphi(t) \;=\; c(t)\ \exp(A(t))\,, \tag{2.5}$$

où cette fois-ci c est une fonction, supposément dérivable, à déterminer. Ceci revient en fait simplement à poser $c(t) \;=\; \varphi(t)\ \exp(-A(t))$ et à chercher la *fonction* c. En calculant

$$\begin{aligned}\varphi'(t) \,-\, a(t)\,\varphi(t) \;&=\; c'(t)\ \exp(A(t)) \,+\, c(t)\,A'(t)\ \exp(A(t)) \,-\, c(t)\,a(t)\ \exp(A(t))\\ &=\; c'(t)\ \exp(A(t))\,,\end{aligned}$$

on voit qu'une fonction φ de la forme (2.5) est solution de (2.3) si et seulement si

$$c'(t)\ \exp(A(t)) \;=\; b(t)\,,$$

c'est-à-dire $c'(t) \;=\; b(t)\ \exp(-A(t))$. Ainsi, les solutions de (2.3) sont les fonctions φ s'écrivant

$$\varphi(t) \;=\; c(t)\ \exp(A(t)) \quad \text{avec} \;\; c'(t) \;=\; b(t)\ \exp(-A(t))\,.$$

En utilisant quelques rudiments de calcul intégral, il est possible d'écrire une formule plus précise. Tout d'abord, on a $A(t) - A(s) = \int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Et d'autre part,

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^t b(s) \exp(-A(s))\,\mathrm{d}s\,,$$

d'où finalement,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}s\,.$$

Ceci est la *formule de Duhamel*, qui exprime un *principe de superposition* des solutions : le premier morceau est en effet la solution générale de l'équation homogène, tandis que le second est une solution particulière de l'équation inhomogène.

La proposition IV.1 se généralise ainsi à l'équation (2.3).

Proposition IV.2 *Soient a et b des fonctions continues sur un intervalle ouvert non vide I, et soient t_0, $u_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle* (2.3) *et telle que $\varphi(t_0) = u_0$. De plus, la dérivée de φ est une fonction continue.*

Dém. La première partie de l'énoncé résulte du calcul fait précédemment (l'existence d'une solution repose sur l'existence, admise, d'une primitive A pour la fonction a, et d'une primitive pour la fonction $t \mapsto b(t) \exp(A(t))$; l'unicité se démontre en remarquant que la seule solution de l'équation homogène (2.3) valant 0 à t_0 est la fonction identiquement nulle). Le fait que φ' soit continue vient de l'équation différentielle elle-même. En effet, par définition,

$$\forall t \in I\,, \quad \varphi'(t) = a(t)\,\varphi(t) + b(t)\,,$$

c'est-à-dire que $\varphi' = a\,\varphi + b$, et elle est donc continue puisque a, b le sont, ainsi que φ (en tant que fonction dérivable). □

Définition IV.3 *Une fonction dérivable dont la dérivée est continue est dite* continûment dérivable, *ou encore* de classe $\mathscr{C}^1$.

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition IV.4 *On appelle* équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants *une équation différentielle de la forme*

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + b\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + c\,u = f(t) \tag{3.6}$$

où b et c sont des réels donnés, et f est une fonction continue sur un intervalle ouvert non vide I. Une solution de (3.6) *est une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable (c'est-à-dire dérivable* *et dont la dérivée est elle-même dérivable) sur un intervalle ouvert non vide $J \subset I$ et telle que, pour tout $t \in J$,*

$$\varphi''(t) \,+\, b\,\varphi'(t) \,+\, c\,\varphi(t) \,=\, f(t)\,.$$

L'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \,+\, b\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \,+\, c\,u \,=\, 0 \tag{3.7}$$

est l'équation homogène *associée à* (3.6)*.*

L'équation différentielle homogène *à coefficients constants* (3.7) se résout explicitement par une méthode analogue à celle employée pour les récurrences linéaires d'ordre 2. Cependant on ne peut éviter, pour traiter complètement le problème, d'avoir recours ici à des arguments d'algèbre linéaire (arguments qui étaient seulement sous-jacents dans le paragraphe 1 sur les récurrences linéaires d'ordre 2).

Proposition IV.3 *Pour tout* $(t_0, u_0, u_1) \in \mathbb{R}^3$*, il existe une unique solution* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de* (3.7) *telle que* $\varphi(t_0) = u_0$*,* $\varphi(t_1) = u_1$*. Considérons l'équation du second degré*

$$\tau^2 + b\tau + c = 0\,. \tag{3.8}$$

Si l'équation (3.8) *a deux solutions réelles distinctes* τ_1 *et* τ_2*, alors* φ *est de la forme*

$$\varphi(t) \,=\, \lambda_1\, \exp(\tau_1 t) \,+\, \lambda_2\, \exp(\tau_2 t)\,.$$

Si l'équation (1.2) *a deux solutions complexes conjuguées* $\tau_1 = \alpha + i\beta$ *et* $\tau_2 = \alpha - i\beta$*, alors* φ *est de la forme*

$$\varphi(t) \,=\, \exp(\alpha t)\,(\lambda_1\, \cos(\beta t) \,+\, \lambda_2\, \sin(\beta t))\,.$$

Si l'équation (3.8) *a une seule solution réelle* τ_0*, alors* φ *est de la forme*

$$\varphi(t) \,=\, \exp(\tau_0 t)\,(\lambda_1 + \lambda_2 t)\,.$$

Dans tous les cas, le couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *est déterminé de façon unique par la donnée de* (u_0, u_1)*.*

Dém. On constate par le calcul que, si τ est solution de (3.8), alors la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\tau t)$ est une solution de (3.7) : si τ est réel, c'est bien une fonction à valeurs réelles ; si $\tau = \alpha + i\beta$ n'est pas réel, alors $\bar{\tau}$ est aussi solution de (3.8), et $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$ est une solution de (3.7) à valeurs réelles. Par conséquent, l'ensemble

$$E \,:=\, \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \varphi \text{ est solution de } (3.7)\}$$

est non vide. D'autre part, on vérifie sans difficulté que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \varphi & \mapsto & (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{array}$$

est linéaire. Admettons provisoirement que Θ est injective. Alors E est de dimension au plus égale à deux.

Or, selon les racines de (3.8), les fonctions $e_j : t \mapsto \exp(\tau_j t)$, $j = 1, 2$, ou bien les fonctions $e_1 : t \mapsto \exp(\alpha t)\, \cos(\beta t)$ et $e_2 : t \mapsto \exp(\alpha t)\, \sin(\beta t)$, ou bien les fonctions $e_1 : t \mapsto \exp(\tau_0 t)$ et $e_2 : t \mapsto t\, \exp(\tau_0 t)$, forment une famille de deux éléments indépendants de E : on vérifie à nouveau par le calcul que ce sont des solutions de (3.7), et leur indépendance s'obtient en observant que s'il existait $\mu_j \in \mathbb{R}$ tels que $\mu_j e_1 + \mu_2 e_2 = 0$ alors on aurait

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mu_j e_1(t) + \mu_2 e_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_j e_1'(t) + \mu_2 e_2'(t) = 0\,,$$

et donc en particulier

$$\begin{cases} \mu_j e_1(0) + \mu_2 e_2(0) = 0\,, \\ \mu_j e_1'(0) + \mu_2 e_2'(0) = 0\,. \end{cases}$$

On montre sans difficulté dans les trois cas que ce système algébrique en (μ_1, μ_2) a comme seule solution $(0, 0)$. Donc E est exactement de dimension 2, ce qui signifie que toutes les solutions de (3.6) sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2, comme annoncé.

Il reste donc à prouver que Θ est injective, c'est-à-dire que si φ est une solution de (3.7) telle que $\varphi(t_0) = 0$, $\varphi'(t_0) = 0$, alors φ est identiquement nulle. Considérons pour cela la fonction $\psi : t \mapsto \psi(t) := \varphi(t)^2 + (\varphi'(t))^2 \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\psi'(t) \;=\; 2\,\varphi'(t)\,(\varphi(t) \;-\; b\,\varphi'(t) \;-\; c\,\varphi(t)) \;\leq\; a\,\psi(t)\,,$$

avec $a = 2|b| + |1 - c|$. Par conséquent, la fonction $t \mapsto \psi(t)\, \exp(-at)$ est décroissante. Comme elle vaut 0 en t_0, elle est nulle pour tout $t \geq t_0$. En appliquant le même argument à la fonction $t \mapsto \psi(t_0 - t)$, on en déduit que ψ est identiquement nulle, et par suite φ aussi. □

Pour rechercher des solutions de (3.6), on peut à nouveau utiliser une « méthode de variation de la constante » . Cela revient à chercher une *fonction* λ_j telle que

$$t \mapsto \lambda_j(t)\, e_j(t)$$

soit solution de (3.6). En utilisant bien sûr que e_j est solution de (3.7), on est ramené à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 pour λ_j' :

$$\lambda'' + (b + 2\tau_j)\lambda_j' = f/e_j\,.$$

Index