Math I Analyse

Premier DM, automne 2008.

Exercice 1
Déterminer l'ensemble A des nombres réels x tels que $x^4 - x^2 - 1 < 0$, puis l'ensemble des majorants de A et l'ensemble des minorants de A. L'ensemble A est-il un intervalle ?

Exercice 2
Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure, une borne supérieure, et si oui lesquelles :

- $\left\{ \dfrac{2^n}{|2^n - 1|} \,;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
- $\left\{ \dfrac{1}{|1 - 2^{-n}|} \,;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
- $\left\{ \dfrac{x^3}{|x^3 - 1|} \,;\ x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\,, \right\}$,
- $\left\{ \dfrac{x^n}{|x^n - 1|} \,;\ x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\,,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 3

1. Démontrer que quels que soient les réels x et y,
$$E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0,1\}\,.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $E((2-\sqrt{3})^n)$.
3. Montrer (en utilisant la formule du binôme) que $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
4. Démontrer que si x et y sont des réels tels que $y \in]0,1[$ et $x+y$ est un entier pair, alors $E(x+y) - E(x) - E(y) = 1$.
5. Déduire de ce qui précède que $E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair.

Exercice 4 (Facultatif, pour aller plus loin.)
On rappelle que par définition un *intervalle* I de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante :

(Quels que soient x et y dans I, quel que soit $z \in \mathbb{R}$, si $x \leq z \leq y$ alors $z \in I$).

On rappelle également qu'il existe exactement neuf types d'intervalles de $\mathbb{R}$. On appelle en particulier *intervalle ouvert* ceux de la forme $]a,b[$ avec $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $b \in \{+\infty\} \cup \mathbb{R}$ et $a \leq b$ (en convenant que $-\infty \leq +\infty$). Noter que si $a = b$ l'intervalle $]a,b[$ est l'ensemble vide.

1. Démontrer que si I est un intervalle ouvert, quel que soit $x \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I\,.$$
Plus généralement, un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :
(Quel que soit x dans A, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$),
est dit *ouvert*.

2. Soit I un intervalle ouvert. On veut démontrer qu'il n'existe pas de sous-ensembles ouverts non vides A et B de $\mathbb{R}$ tels que $I = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$: on suppose que c'est le cas et on veut aboutir à une contradiction. On considère pour cela, étant donnés $a \in A$ et $b \in B$, l'ensemble
$$E := \{t \in [0,1]\,;\ a + t(b-a) \in A\}\,.$$
   (a) Montrer que E admet une borne supérieure, que l'on appellera T.
   (b) Montrer (en utilisant le fait que A est ouvert) que $a + T(b-a)$ n'appartient pas à A.
   (c) En déduire (en utilisant le fait que I est un intervalle) que $a + T(b-a)$ appartient à B.
   (d) Montrer (en utilisant le fait que B est ouvert) que ceci contredit le fait que T soit la borne supérieure de E.