Math I Analyse

Premier DM, automne 2008. Corrigé.

Exercice 1
On a

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^4 - x^2 - 1 < 0\} \ = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 \in B\}$$

avec

$$B = \{y \in \mathbb{R}^+\,;\ y^2 - y - 1 < 0\}\,.$$

L'ensemble B se détermine à l'aide des racines de $y^2 - y - 1$, qui sont $y_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ et $y_2 = (1 + \sqrt{5})/2$: pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$y^2 - y - 1 = (y - y_1)(y - y_2)\,,$$

et comme $y_1 < 0 < y_2$, on obtient $B = [0, y_2[$, d'où $A =]-\sqrt{y_2}, \sqrt{y_2}[$, qui est un intervalle. L'ensemble des majorants de A est l'intervalle $[\sqrt{y_2}, +\infty[$ et l'ensemble des minorants est l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{y_2}]$.

Exercice 2

- La suite de terme général $2^n/|2^n - 1| = 2^n/(2^n - 1)$ étant décroissante (car $2^{n+1}/(2^{n+1} - 1) - 2^n/(2^n - 1) = (2^n - 2^{n+1})/((2^{n+1} - 1)(2^n - 1)) < 0$), de limite 1 (puisque la terme géométrique $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$), l'ensemble $A_1 = \left\{ \dfrac{2^n}{|2^n - 1|}\,;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ admet 1 comme borne inférieure, et $2 = 2^1/(2^1 - 1)$ comme plus grand élément et donc aussi comme borne supérieure.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{|1 - 2^{-n}|} = \dfrac{2^n}{|2^n - 1|}$, donc l'ensemble $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{|1 - 2^{-n}|}\,;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ coïncide avec A_1 : il admet 1 comme borne inférieure et 2 comme plus grand élément.
- L'ensemble $A_3 = \left\{ \dfrac{x^3}{|x^3 - 1|}\,;\ x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\right\}$ n'est pas majoré puisqu'il contient par exemple l'ensemble $\left\{ \dfrac{1}{|1 - n^3/(n+1)^3|}\,;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$, qui n'est pas majoré puisque la suite de terme général $1/|1 - n^3/(n+1)^3| = 1/(1 - n^3/(n+1)^3)$ tend vers $+\infty$. Donc A_3 n'admet pas de borne supérieure. En revanche l'ensemble A_3 est minoré par 0 ; de plus il admet 0 comme borne inférieure car il contient par exemple l'ensemble $\left\{ \dfrac{1}{|1 - n^3|}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\,,\ n \geq 2 \right\}$ et la suite de terme général $1/|1 - n^3| = 1/(n^3 - 1)$ converge vers 0.
- L'ensemble $A_4 = \left\{ \dfrac{x^n}{|x^n - 1|}\,;\ x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\,,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ contient A_3 qui n'est pas majoré donc A_4 n'est pas majoré et n'admet par conséquent pas de borne supérieure. Il est minoré par 0. Son sous-ensemble A_3 admettant 0 comme borne inférieure, A_4 a aussi 0 comme borne inférieure.

Exercice 3

1. Quels que soient les réels x et y, on a par définition

$$E(x) \leq x < E(x) + 1\,, \quad E(y) \leq y < E(y) + 1\,, \quad E(x+y) \leq x + y < E(x+y) + 1\,,$$

et par addition des deux premières double-inégalités

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2\,,$$

d'où en utilisant la troisième,

$$E(x) + E(y) < E(x+y) + 1\,, \text{ et } \quad E(x+y) < E(x) + E(y) + 2\,.$$

Puisque $E(x) + E(y)$ et $E(x+y)$ sont des entiers ceci implique

$$E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}\,.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$ puisque $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ (car $1 < 3 < 4$). Donc $E((2-\sqrt{3})^n) = 0$.
3. D'après la formule du binôme,

$$(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\,((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k)$$

$$= \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}\,((\sqrt{3})^{2k} + (-\sqrt{3})^{2k}) \;=\; 2 \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}\,3^k\,,$$

qui est un entier pair comme produit de 2 avec une somme de produits d'entiers.
4. Si x et y sont des réels tels que $y \in]0,1[$ et $x+y$ est un entier, alors $E(x+y) = x+y$ et $E(y) = 0$. On sait d'après la première question que $E(x+y) - E(x) - E(y)$ vaut 0 ou 1. Si c'était 0 on aurait $x + y = E(x)$, ce qui n'est pas possible puisque $E(x) \leq x$ et $y > 0$. Donc $E(x+y) - E(x) - E(y) = 1$.
5. D'après ce qui précède appliqué à $x = (2+\sqrt{3})^n$ et $y = (2-\sqrt{3})^n$,

$$E((2+\sqrt{3})^n) = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n + 1$$

est un entier impair.

Exercice 4

1. Si $I =]a,b[$ avec $b = +\infty$, quels que soient $x \in I$ et $\varepsilon > 0$, on a $x + \varepsilon \in I$ et donc $[x, x+\varepsilon] \subset I$. De même, si $a = -\infty$, quels que soient $x \in I$ et $\varepsilon > 0$, on a $x - \varepsilon \in I$ et donc $[x-\varepsilon, x] \subset I$. Si b est un réel, quel que soit $x \in I$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon < b$ (il suffit par exemple de prendre $(b-x)/2$) et ainsi $[x, x+\varepsilon] \subset I$. De même, si a est un réel, quel que soit $x \in I$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x - \varepsilon > a$ (par exemple $\varepsilon = (x-a)/2$) et ainsi $[x-\varepsilon, x] \subset I$. Si a et b sont tous deux des réels, on peut choisir $\varepsilon = \min((x-a)/2, (b-x)/2)$, de sorte que dans tous les cas,

$$[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset I\,.$$

et a fortiori

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I\,.$$

2. Soit I un intervalle ouvert. Supposons qu'il existe des sous-ensembles ouverts non vides A et B de $\mathbb{R}$ tels que $I = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Soient $a \in A$ et $b \in B$ et

$$E := \{t \in [0,1]\,;\ a + t(b-a) \in A\}\,.$$

Puisque $A \cap B = \emptyset$, nécessairement $a \neq b$. Quitte à échanger les rôles de A et B on supposera $a < b$.

(a) L'ensemble E est non vide (car $0 \in E$, puisque $a \in A$) et majoré par 1 donc il admet une borne supérieure T.

(b) Si $a + T(b-a)$ appartenait à A il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $[a + T(b-a), a + T(b-a) + \varepsilon[\subset A$. Par suite, $T + \varepsilon/2(b-a)$ appartiendrait à E, ce qui contredirait le fait que T majore E.

(c) Comme $a \leq a+T(b-a) \leq b$ et a, b sont deux éléments de l'intervalle I, $a+T(b-a)$ appartient à I et comme $I = A \cup B$, d'après la question précédente $a + T(b-a)$ appartient nécessairement à B .

(d) Comme B est ouvert il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a+T(b-a)-\varepsilon, a+T(b-a)+\varepsilon[\subset B$. Donc en particulier, puisque A et B sont disjoints, aucun réel $t \geq T - \varepsilon/2(b-a)$ ne peut appartenir à E : ceci contredit le fait que T soit la borne supérieure de E. C'est donc que l'hypothèse de départ était fausse : il n'existe pas d'ouverts A et B de $\mathbb{R}$ tels que $I = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$; on dit que I est *connexe*.