Compétences en logique

Négation d'une proposition P

- La négation logique transforme une propriété vraie en une propriété fausse ; une propriété fausse en une propriété vraie ; une propriété en une nouvelle propriété qui est satisfaite exactement par les éléments qui ne satisfont pas la première.
- Comprendre que si P est vraie, alors non P est fausse
  si P est fausse, alors non P est vraie
- La négation d'une proposition n'est pas son « contraire ».
  (même si des fois cela peut être le cas)
- Savoir nier une proposition

Implication : P => Q

- non P ou Q
- tables de vérité de P=>Q
- comprendre que P=>Q est vraie lorsque P est fausse
- équivalence avec la contraposée : (non P) => (non Q)
- savoir nier une implication : P et non Q
  La négation d'une implication n'est pas une implication
- condition nécessaire, condition suffisante

Les quantificateurs :

Soit P(x) une propriété dépendant de x.

« Pour tout x P(x) » (« ∀x P(x) ») est vraie dans une structure donnée si et seulement si tous les objets du domaine satisfont la propriété exprimée par F ; sinon elle est fausse »

« Il existe x P(x) » (« ∃ x P(x) ») est vraie dans une structure donnée si et seulement « Pour tout x, non P(x) »est fausse dans la structure.

Par conséquent :

- La négation de « ∀x P(x) » est « ∃ x non P(x) »
- La négation de « ∃ x P(x) » est « ∀x nonP(x) »

Exercice 1 :
Donner la négation mathématique des phrases suivantes :

1) Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges
2) Certains nombres entiers sont pairs
3) Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4

Soit f :IR->IR

4) f est positive ($\forall x\ f(x) \geq 0$)
5) f est paire sur IR ($\forall x\ f(x)=f(-x)$)

Exercice 2
Soient les propositions, P : "J'ai mon permis de conduire" et Q : "J'ai plus de 18 ans".
Les propositions P => Q et Q => P sont-elles vraies ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 3
Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.
a) . . . $x \in$ IR, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
b) . . . $x \in$ IR, $x^2 + 3x + 2 = 0$.
c) . . . $x \in$ IR, $2x + 1 = 0$.
d) . . . $x \in$ IR, $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Exercice 4
Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.
1) $\exists \ \in$ IN, $x^2 > 7$.
2) $\forall \in$ IN, $x^2 > 7$.
3) $\forall x$ IN, $\exists\ y \in$ IN, $y > x^2$.
4) $\exists\ x \in$ IN , $\forall x^2$ IN, $y > x^2$.

Exercice 5
On considère la proposition P suivante :
P : "Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x".
1) Ecrire la proposition P qu'avec des symboles mathématiques (quantificateurs,...).
2) Ecrire la négation de P avec des quantificateurs puis l'énoncer en français.

Exercice 6
Soient P, Q et R trois propositions, donner la négation de :
a) P et (non Q ou R). b) (P et Q) => R.

Exercice 7
Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, hj(x) son heure de réveil le jour j.
a) Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition : "Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h."
b) Ecrire ensuite la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.