# Nombres réels, bornes supérieures et inférieures.

**Exercice 1** *On considère les nombres réels*
$\alpha = \sqrt{11+2\sqrt{29}} + \sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$ *et* $\beta = \sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$.
*Montrer que* $\alpha = \beta$ *(on pourra calculer* $\left(\sqrt{5}+\sqrt{11-2\sqrt{29}}\right)^2$*).*

**Exercice 2** *On donne des entiers strictement positifs,* $a,\ b,\ c,\ d,\ p,\ q$ *tels que* $bc-ad=1$ *et* $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$.
*Montrer que* $p > a,\ p > c,\ q > b,\ q > d$.

**Exercice 3** *Montrer que le nombre réel*

$$\gamma = \sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$$

*est un entier naturel que l'on déterminera.*
*Indication : montrer que* $\gamma$ *est solution d'une équation du 3ème degré à coéfficients entiers.*

**Exercice 4** *En utilisant la formule du binôme de Newton montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \qquad \sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}.$$

**Exercice 5**
1. *Etablir :* $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
2. *En déduire :* $\forall (a,b,c) \in [0,1]^3,\ \min(a(1-b), b(1-c), c(1-a)) \leq \frac{1}{4}$.

**Exercice 6** *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}.$$

**Exercice 7** *Montrer que* $\forall (x,m) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq m \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \leq 1+2|m|+x$.

**Exercice 8** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, *montrer que :*

$$(a_1 + \cdots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

**Exercice 9** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*,\ x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$. *Etablir que l'un au moins des deux produits* $\prod_{i=1}^n x_i$, $\prod_{i=1}^n (1-x_i)$ *est inférieur ou égal à* $2^{-n}$.

**Exercice 10** *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n+1}{n+2}$.
*En déduire que*

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10} \qquad (1)$$

**Exercice 11**
1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n$ *ne soit le carré d'aucun entier. Montrer que* $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
2. *Soient* $r \in \mathbb{Q}_+,\ s \in \mathbb{Q}_+$ *; on suppose que* $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$. *Montrer, en raisonnant par l'absurde, que* $\sqrt{r}+\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$.

**Exercice 12** *On veut trouver les solutions dans* $\mathbb{R}$ *de l'équation*

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \qquad (1)$$

1. *Montrer que $x$ est solution de* (1) *si et seulement si*
$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1 \qquad (2)$$
2. *Trouver les solutions $u \in \mathbb{R}$ de l'équation* $|u-2|+|u-3|=1 \qquad (3)$.
3. *Conclure.*

**Exercice 13** *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$.*
*Montrer que, quels que soient les réels $x$ et $y$, $g(x+y) \leq g(x)+g(y)$.*

**Exercice 14** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
1. *Montrer que* $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$.
2. *En déduire la partie entière du nombre réel*
$$S = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

**Exercice 15** *Montrer que,* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\mathrm{E}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=\mathrm{E}(x)$.
*Indication : on distinguera les cas* $\mathrm{E}(x)$ *pair et $E(x)$ impair.*

**Exercice 16** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
1. *Montrer (en utilisant la formule du binôme de Newton) que* $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ *est un entier pair.*
2. *En déduire que* $\mathrm{E}((2+\sqrt{3})^n)$ *est un entier impair.*

**Exercice 17** *Monter que :* $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(-x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z},\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$
*En déduire que si $p,q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \wedge q = 1$ alors* $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1}\mathrm{E}\left(k\frac{p}{q}\right)=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

**Exercice 18** *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que*
1. $0 \leq \mathrm{E}(nx)-n\mathrm{E}(x) \leq n-1$.
2. $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{n}\mathrm{E}(nx)\right)=\mathrm{E}(x)$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{E}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\mathrm{E}(nx)$.

**Exercice 19** *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Y-a-t-il équivalence entre*
*1)* $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in A$, $x \geq \alpha$ *et* *2)* $\forall x \in A, x > 0$ *?*

**Exercice 20** *Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que pour tout réel $x$ vérifiant $x > b$ on ait $a \leq x$. Montrer que $a \leq b$.*

**Exercice 21** *Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in A, \forall y \in B, \quad x < y$.*
*Montrer que $A$ admet une borne supérieure et $B$ admet une borne inférieure. Comparer* $\sup A$ *et* $\inf B$.

**Exercice 22** *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que si $A$ possède un plus petit élément $a$ (resp. un plus grand élément $b$), alors $A$ possède une borne inférieure (resp. borne supérieure) et* $\inf A = a$ *(resp.* $\sup A = b$*).*

**Exercice 23** *Soit* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. *Montrer que* $\sup\limits_{x,y\in A} |x-y| = \sup(A) - \inf(A)$.

**Exercice 24** *Soient* $A, B$ *deux parties non vides et majorées de* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $A + B := \{a + b\,; a \in A, b \in B\}$ *est majorée et que* $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

**Exercice 25** *Soit* $A$ *la partie de* $\mathbb{R}$ *définie par* $A = \left\{ \dfrac{m}{mn+1};\ m \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
*Montrer que* $A$ *a une borne supérieure et une borne inférieure. Les calculer.*

**Exercice 26** *Soit* $A$ *la partie de* $\mathbb{R}$ *définie par* $A = \left\{ \dfrac{mn}{m^2+n^2+1};\ m \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
*Montrer que* $A$ *a une borne supérieure et une borne inférieure. Les calculer.*

**Exercice 27** *Soit* $X = \left\{ \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{q^2} - \dfrac{1}{pq};\ p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
*Montrer que* $X$ *possède une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.*
*Indication : pour l'existence de la borne supérieure, on pourra d'abord remarquer que* $\left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{q^2}\right) \geq 0$.

**Exercice 28** *Soit* $A = \{x^2 + y^2;\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ xy = 1\}$.

1. *Montrer que* $A$ *possède une borne inférieure que l'on déterminera.*
2. $A$ *possède-t-elle une borne supérieure ?*

**Exercice 29** *Soit* $X = \left\{ \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. *Montrer que* $X$ *possède une borne supérieure et une borne inférieure que l'on déterminera.*

**Exercice 30** *Soit* $A = \{xy;\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ y \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$. *Montrer que* $A$ *possède une borne supérieure et une borne inférieure. Les déterminer.*

**Exercice 31** *Soit* $A = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. *Montrer que* $A$ *possède une borne inférieure et une borne supérieure. Les déterminer.*