Suites de nombres réels.

Exercice 1 *Étudier la convergence des suites de nombres réels définies par :*
a) $u_n = 0,55\dots 5$ *(les n premières décimales sont égales à 5, les autres sont nulles),*

b) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$, *c)* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *d)* $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$, *e)* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$,

f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$, *g)* $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$ *(on montrera $\forall k \in \{2,\dots,n-2\}$ $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2}$)*

h) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx), x \in \mathbb{R}$, *i)* $u_n = a^{\frac{1}{n}}, a > 0$, *j)* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$, *k)* $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 2 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si elle est stationnaire.*

Exercice 3 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. Montrer que l'existence d'une des deux limites $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\alpha)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\alpha)$ entraîne celle de l'autre et que l'existence des deux entraîne une contradiction. Conclure.*

Exercice 4 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que si $l < 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*
2. *Montrer que si $l > 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.*

Exercice 5 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle tendant vers $+\infty$. Montrer que $\{u_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.*

Exercice 6 *Donner un exemple de suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ divergente telle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ la suite $(x_{kn})_{n\geq 0}$ soit convergente.*

Exercice 7 *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles convergentes. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_n = \inf(u_n, v_n)$, $v_n = \sup(u_n, v_n)$ sont convergentes et calculer leur limite en fonction de celles de $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$.*

Exercice 8 *Montrer que la suite $(\tan(n))_{n\geq 0}$ diverge.*

Exercice 9 *On note $H_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*

1. *Montrer que $\forall m \in \mathbb{N} \quad H_{2^{m+1}} \geq H_{2^m} + \dfrac{1}{2}$.*
2. *En déduire $\forall m \in \mathbb{N} \quad H_{2^m} \geq \dfrac{m}{2} + 1$ puis*

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad H_n \geq \frac{1}{2}(\log_2 n + 1).$$

3. *Conclure* $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
4. *Montrer directement que* $(H_n)_{n\geq 0}$ *n'est pas de Cauchy.*

Exercice 10 *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite réelle telle que pour tout* $p, q \in \mathbb{N}$ $u_{p+q} \leq u_p + u_q$ *(suite sous-additive).*
On pose $I = \inf\{\frac{u_k}{k}\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$ *supposé exister dans* $\mathbb{R}$. *En utilisant la caractérisation connue de l'*inf *et la division euclidienne montrer que* $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} I$.

Exercice 11 *a) Moyenne de Césaro :*
Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ *un esuite dans* $\mathbb{C}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *une suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots u_n}{n}.$$

Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* $l \in \mathbb{C}$ *alors* $(v_n)_{n\geq 1}$ *aussi.*
b) Lemme de l'escalier :
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \mathbb{C}$. *Montrer que* $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Exercice 12 *Soient* $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite réelle convergente et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par*
$v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k$. *Montrer que* $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 13 *On considère les deux suites* $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définies par :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *sont adjacentes. On admet que e est leur limite commune. Montrer que e est irrationnel.*
Montrer directement que $(u_n)_{n\geq 1}$ *est de Cauchy.*

Exercice 14 *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $u_n = \dfrac{\sin 1}{3} + \dfrac{\sin 2}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{3^n}$. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est de Cauchy. Conclure.*

Exercice 15 *Étudier la convergence des suites suivantes :*
a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$, *b)* $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$, *c)* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 16 *Soit* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite réelle à termes positifs telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+2} \leq \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}).$$

Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ *converge.*

Exercice 17 *Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :*
a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^{p-1}}$, $p \geq 2$ *fixé.*
b) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.
c) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$, $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n$.

Exercice 18 *Étudier les suites définies par :*
a) $(u_0, v_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n},$
b) $u_0 \geq v_0 > 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},$
c) $(u_0, v_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \setminus \{0, 0\}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + v_n^2}, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{u_n^2 + v_n^2},$
d) $(u_0, v_0) \in]0, 1[^2, \quad \alpha \in]0, 1[, \quad u_{n+1} = \alpha u_n^2 + (1 - \alpha) v_n^2, \quad v_{n+1} = (1 - \alpha) u_n^2 + \alpha v_n^2,$
e) $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3, \quad u_{n+1} = |v_n - w_n|, \quad v_{n+1} = |w_n - u_n|, \quad w_{n+1} = |u_n - v_n|.$

Exercice 19 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$.*

Exercice 20 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle monotone. Montrer que si $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une suite extraite convergente alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.*

Exercice 21 *Démontrer que toute suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une suite extraite monotone.*

Exercice 22 *Étudier les suites définies par :*

a) $u_0 = \dfrac{\pi}{4}, \quad u_{n+1} = 1 - \cos u_n$

b) $u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$

c) $u_0 < 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$

d) $u_0 > 0, a > 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{a^2}{u_n})$

e) $u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

f) $u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$

g) $u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$

h) $u_0 \in]0, 2[, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^{n+1} u_n}$

i) $u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = \dfrac{n^3 u_n + n + 1}{(n+1)^3}$

Exercice 23 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$. Montrer que si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge alors elle est stationnaire.*

Exercice 24 *Étudier les suites réelles définies par :*
a) $u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2,$
a) $u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \qquad u_{n+2} = \sqrt[3]{u_{n+1}^2 u_n}.$

Exercice 25 *Suite de Fibonacci :*
Soit $(\phi_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 0 \qquad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

1. *Calculer ϕ_n en fonction de n.*
2. *Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2} = (-1)^n$.*
3. *Établir que $\left(\dfrac{\phi_{n+1}}{\phi_n}\right)_{n\geq 1}$ converge et trouver sa limite.*