Limites, continuité, dérivabilité, Théorème de Rolle et accroissements finis,

1 *Limites, continuité*

Exercice 1 *Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ pour tout $x \neq 0$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. (On pourra utiliser les suites $u_n = \frac{1}{n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$.)*

Exercice 2 *Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer si f admet une limite en a et le cas échéant calculer cette limite :*

$$(i)\ f(x) = \frac{3x^2-1}{4x+7},\ a = \pm\infty, \qquad (ii)\ f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1},\ a = 1, \qquad (iii)\ f(x) = x^2 + \frac{\sqrt{x^2}}{x},\ a = 0,$$

$$(iv)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1},\ a = \pm\infty; \quad (v)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1},\ a = 0, \quad (vi)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}-1},\ a = 0,$$

$$(vii)\ f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x},\ a = +\infty, \quad (viii)\ f(x) = \sqrt{x^2+5x} + 3 - \sqrt{x^2-1},\ a = -\infty.$$

Exercice 3 *Pour chacune des fonctions f suivantes calculer la limite de f en 0 :*

$$(i)\ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}; \qquad (ii)\ f(x) = \frac{\sin x}{\sin 3x}; \qquad (iii)\ f(x) = \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}.$$

Exercice 4 *Les applications suivantes de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ peuvent-elles êtres prolongées en des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?*

$$u_1(x) = \frac{1}{|x|}; \quad u_2(x) = x|1 + \frac{1}{x}|; \quad u_3(x) = x\cos(1/x).$$

Exercice 5 *Déterminer si les assertions suivantes sont vraies.*

(a) La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

(b) La somme d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.

(c) La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.

(d) La somme de deux fonctions discontinues en un point est continue en ce point.

(e) Le produit de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

(f) Le produit d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.

Exercice 6 *Soit la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x\mathrm{E}(1/x) & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où f est continue. Tracer son graphe.

Exercice 7 *La fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$ par $f(x) = 1 - x - \dfrac{2x\ln|x|}{x+1}$ peut-elle être prolongée par continuité en -1 et en 0 ?*

Exercice 8 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que $|f|$ est une fonction continue.*
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que l'on ait $f(x_n) = f(x_n + 1/n)$.*

Exercice 10 *(a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On suppose d'une part que f est périodique et d'autre part que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.*

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dont les restrictions à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont constantes. On suppose de plus que f est continue en 0. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 *(a) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
On suppose que f est continue en a et que $f(a) > 0$.
Montrer qu'il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in [a - \eta, a + \eta]$, $f(x) > 0$.

(b) Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = \mathrm{Max}(f(x), g(x))$.
Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 *1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f une application continue de l'intervalle $[a,b]$ dans lui-même. Montrer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.*

2. Soient f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans lui-même telles que $f \circ g = g \circ f$.
   - *(a) On pose $Y = \{y \in [0,1] \mid f(y) = y\}$. Montrer que Y possède une borne supérieure et une borne inférieure que l'on notera respectivement M et m.*
   - *(b) Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de Y qui converge vers a. Montrer que $a \in Y$.*
   - *(c) Montrer que $M \in Y$ et $m \in Y$.*
   - *(d) Montrer que $g(Y) \subset Y$.*
   - *(e) Montrer que $g(M) \leq f(M)$ et que $f(m) \leq g(m)$.*
   - *(f) En déduire qu'il existe $\beta \in [0,1]$ tel que $f(\beta) = g(\beta)$.*

Exercice 13 *Soient f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait*

$$0 < f(x) < g(x).$$

1. *Pour $x \in [0,1]$, on pose $h(x) = f(x)/g(x)$. Montrer que $h([0,1]) \subset]0,1[$.*
2. *En déduire qu'il existe deux nombres réels m et M de $]0,1[$ tels que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait*

$$m \leq h(x) \leq M.$$

3. *Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite quelconque d'éléments de $[0,1]$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $y_n = (h(x_n))^n$. Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.*

2 *Dérivées - Concepts élémentaires.*

Exercice 14 *Déterminer si les assertions suivantes sont vraies.*
- *(a) Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*
- *(b) Toute fonction continue en un point est dérivable en ce point.*
- *(c) La dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
- *(d) Toute fonction non dérivable en un point est discontinue en ce point.*
- *(e) La somme de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point.*
- *(f) La somme de deux fonctions non dérivables en un point est dérivable en ce point.*

Exercice 15 *Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont-elles dérivables en 0 ?*

$$f_1(x) = \frac{x}{1+|x|}\ , \qquad f_2(x) = \frac{|x|}{1+x^2}.$$

Exercice 16 *Préciser pour chacune des fonctions suivantes en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.*

$$(i) f(x) = \cos(\cos x); \qquad (ii)\ g(x) = \sqrt{|\sin x|}; \qquad (iii)\ h(x) = \sqrt{1+\cos x}.$$

Exercice 17 *Calculer, là où elles sont définies, les dérivées des fonctions suivantes.*

$$f_1(x) = (x^2+1)\sqrt{x^3-1}; \quad f_2(x) = \frac{x^n}{1+x^n}; \quad f_3(x) = x^x; \quad f_4(x) = \ln(\ln(x)).$$

$$f_5(x) = \frac{x}{2}\left[\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\right]; \quad f_6(x) = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-2}{\sqrt{1+x^2}+2}; \quad f_7(x) = e^{(1/x)}\sqrt{x(x+1)}.$$

Exercice 18 *Soit f une fonction dérivable en un point a. Montrer que, lorsque $h \longrightarrow 0$,*

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \longrightarrow f'(a).$$

Exercice 19 *Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction*

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto & \begin{cases} e^x - x & si \quad x < 0; \\ \cos^2(\pi x) & si \quad 0 \leq x \leq 1; \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x} & si \quad x > 1. \end{cases} \end{array}$$

Exercice 20 *(Exercice extrait de l'épreuve de janvier 2001).*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) = \begin{cases} chx & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & si \quad x \in]0,1] \\ \dfrac{2-\ln x}{4} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue ?

(b) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle dérivable ? En chacun de ces points, préciser la valeur de la fonction dérivée.

Exercice 21 *Pour chacune des applications f, g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies comme suit :*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

déterminer l'ensemble des points où elle est continue, puis l'ensemble des points où elle est dérivable, et enfin l'ensemble des points où sa dérivée est elle-même continue.

Exercice 22 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur $[0,1]$. On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f(x) \geq mx$.*

Exercice 23 *Montrer par récurrence sur n que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction polynomiale f_n telle que pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, on ait :*

$$\tan^{(n)}(x) = f_n(\tan x).$$

(où on note $g^{(n)}$ la dérivée n-ème d'une fonction g).
Calculer explicitement f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5. En déduire la valeur de la dérivée 5-ème de $\tan$ en 0.

Exercice 24 *On désigne par I l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x).f'(f(x)) = 1$.*

1. *Montrer que l'application identité $1_{\mathbb{R}}$ appartient à I.*
2. *Soit $f \in I$. On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$g(x) = f(f(x)) - x.$$

   (a) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$. En déduire que f est strictement croissante.*

   (b) *On suppose qu'il existe un nombre réel x_0 tel que $f(x_0) \neq x_0$. Montrer que $g(x_0) \neq 0$. Conclure.*

3 *Rolle et accroissements finis*

Exercice 25 *Démontrer les inégalité suivantes :*

(a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ *pour tous réels x et y.*

(b) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ *pour tout réel $x > 0$.*

(c) $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ *pour tout réel $x \in [0, \pi/2]$.*

Exercice 26 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que*

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)\ .$$

Exercice 27 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :*

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{2} \text{ si } x < 1 \text{ et } f(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 1.$$

Montrer qu'il existe un $c \in]0, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$, puis déterminer toutes les valeurs possibles de c.

Exercice 28 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui ne prenne que des valeurs strictement positives.*

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que l'on ait :

$$f(a) = f(b) e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Exercice 29 *Soit f de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ une application dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.*
1. Montrer qu'il existe x_1 dans $]a, b[$ tel que $f(x_1) > f(a)$ et x_2 dans $]a, b[$ tel que $f(x_2) > f(b)$.
2. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 30 *Soit f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ une application deux fois dérivable.*
On suppose que pour tout x réel, on a :

$$|f(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq 1.$$

Montrer pour tout x réel, on a :

$$|f'(x)| \leq 2.$$

Exercice 31

1. *Donner un exemple de fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $]0, 1[$ et telle que $f(1) - f(0) > f'(c)$ pour tout $c \in]0, 1[$.*
2. *Donner un exemple de fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$, telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle que $f'(c) \neq 0$ pour tout $c \in]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$.*

Exercice 32 *Soit* f $:]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Peut-on avoir simultanément :* $f(x) \rightarrow \infty$ *quand* $x \rightarrow a$ *et* $|f'(x)| \leq M$ *où* M *est une constante fixe ?*

4 *Problèmes*

Exercice 33 *Soit un entier* $n > 1$*. On considère l'application polynômiale* $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1.$$

1. *Montrer qu'il existe un unique* $\xi_n \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $f_n(\xi_n) = 0$.
2. *On considère la suite* $(\xi_n)_{n>1}$ *de nombres réels strictement positifs. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.*

Exercice 34

1. *Soit un entier* $n > 0$*. Montrer que* $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$.
2. *On définit la suite* $(u_n)_{n>0}$ *de nombres réels en posant*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ *est strictement décroissante. En déduire qu'elle est convergente et que, si* $\gamma = \lim_{n\rightarrow\infty} u_n$*, on a* $0 \leq \gamma < 1$*. (C'est la célèbre constante d'Euler dont on ignore encore si elle est rationnelle ou non. Elle vaut environ* $\gamma \simeq 0.57721566490153286....$*)*