Math I Analyse,
Feuille 3: Suites numériques

1 Existence et calculs de limite

Exercice 1. Etudier l'existence d'une limite pour les suites suivantes.

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$
b) $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$
c) $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$
d) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$
e) $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$
f) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
g) $u_n = \frac{3n^2+2}{5n+1}$
h) $u_n = n\cos n + 2n$.

Exercice 2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$ est convergente, et calculer sa limite (Indication : multiplier u_n par $\sqrt{n^2+n} + n$).

Exercice 3. Montrer que les suites (u_n) suivantes sont convergentes, et calculer leur limite :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}.$$

Exercice 4. En n'utilisant que la définition d'une limite, montrer que :
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2n = +\infty$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$.

Exercice 5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Exercice 6. Étudier la suite $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, a et b étant donnés dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 7. Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ et x un réel.

1) Montrer que $x = \sup(A)$ ssi (x majore A et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x).

2) Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A)$.

2 Exercices théoriques

2.1 Monotonie, suites extraites et suites de Cauchy

Exercice 8. a) Soit (u_n) telle que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l. Montrer alors que u_n converge vers l.

b) Soit (u_n) telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes (cette fois sans hypothèse sur la valeur de leur limite). Montrer que les trois limites sont en fait égales, et que u_n converge vers cette limite.

Exercice 9. On définit la suite (u_n) par $u_n = \dfrac{\sin 1}{3} + \dfrac{\sin 2}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{3^n}$. Montrer que la suite (u_n) est de Cauchy. Conclure.

2.2 Suites arithmétiques, suites géométriques

Exercice 10. On étudie la convergence d'une suite géométrique de raison a.

1) i) Rappeler la formule du binôme de Newton.

ii) Soit $a > 1$. En écrivant $a = 1 + b$, avec $b > 0$, montrer que $(a^n) \geq 1 + nb$.

iii) En déduire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a^n = +\infty$.

2) En déduire que si $0 \leq a < 1$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a^n = 0$.

3) Si $a \geq 0$, conclure que $u_n = a^n$ est convergente si et seulement si $0 \leq a \leq 1$.

Exercice 11. Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé et (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) Calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
3) La suite (u_n) est-elle monotone ? Si oui, préciser si elle est croissante ou décroissante en fonction du signe de r.
4) La suite est-elle convergente ? Bornée ?
On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ par $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
5) Calculer le terme général v_n en fonction de n. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Exercice 12. 1) Soit (u_n) une suite réelle.
i) On suppose : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ k \in]0, 1[: \forall\, n \geq n_0,\ |u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = 0$

ii) On suppose : (u_n) est à valeurs positives et $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ k > 1 : \forall\, n \geq n_0,\ u_{n+1} \geq k u_n$. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
iii) Application : montrer que $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

2) Généralisation : on considère (u_n) suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers l.
i) Si $l > 1$, $u_n \longrightarrow +\infty$.
ii) Si $l < 1$ alors $u_n \longrightarrow 0$.
Indication pour i) (respectivement pour ii)) : montrer qu'il existe $k > 1$ (respectivement $k < 1$), $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq k u_n$ (respectivement $u_{n+1} \geq k u_n$)

3 Suites récurrentes

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.
1) Montrer que (u_n) est croissante et majorée.

2) Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif ℓ qui vérifie $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 14. Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n + E(u_n))$ où E désigne la fonction partie entière.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2})$$

1) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$.

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

4 Problèmes

Exercice 16. Le théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle, on définit la suite (v_n) par $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1) On suppose que (u_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.
   i) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N,\ |u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   ii) En déduire que $\forall\, n \geq N$, $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   iii) Montrer qu'il existe $N' \geq N$: $\forall n \geq N'$, $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   iv) En déduire que $\forall\, n > N'$, $|v_n| \leq \varepsilon$, et conclure que (v_n) converge vers 0.

2) On suppose que (u_n) converge vers l, montrer que (v_n) converge vers l. Indication : considérer la suite $u_n - l$ et appliquer le 1).

3) Que peut on dire de v_n lorsque u_n tend vers $+\infty$?

4) Le lemme de l'escalier : soit (u_n) une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)$ soit convergente de limite l. Montrer que $(\frac{u_n}{n})$ est convergente de limite l.
Indication : appliquer le théorème de Césaro à la suite $(u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 17. Le nombre e :

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.\,n!}$$

a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On admettra que leur limite commune est e.
b) Montrer que e est irrationnel.
Indication : raisonner par l'absurde : on suppose que $e = \frac{p}{q}$, alors $u_q \leq e \leq v_q$, en utilisant le fait que $e.q!$ est entier, montrer que $e = u_q$ et expliquer en quoi c'est absurde.

Exercice 18. Série harmonique.

Soit (H_n) définie par $H_0 = 0$, et pour $n \geq 1$: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Etudier la monotonie de H_n.
2) Montrer que $\forall\, m \in \mathbb{N},\ H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.

3) En déduire $H_{2^m} \geq \frac{m}{2} + 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n \geq \frac{1}{2}(\log_2 n + 1)$.
Indication : utiliser m tel que $m \leq \log_2 n \leq m + 1$, et remarquer que pour m ainsi défini, $H_{2^m} \leq H_n$.

4) Conclure : la suite (H_n) diverge vers $+\infty$.

5) Conclure directement en montrant que (H_n) n'est pas de Cauchy.