Équations Différentielles.

Exercice 1 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $2y' - 3y = 0$, *b)* $y' + 2y = 0$, *c)* $y'' + y' = 0$,

d) $y'' - 4y' + 3y = 0$, *e)* $y'' + y' + y = 0$ *et* *f)* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Exercice 2 *Trouver la solution de l'équation différentielle*

$$y'' + y' - 12y = 0$$

qui vérifie $y(2) = 2$ *et* $y'(2) = 0$.
Même question avec l'équation $\theta'' + 9\theta = 0$ *et les conditions* $\theta(\pi/2) = 0$ *et* $\theta'(\pi/2) = 3$.

Exercice 3 *Intégrer les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad y'' + y = \cos^2(x) \ , & \text{b)} \quad y'' - 2y' + 5y = 10\cos(x) \ , \\ \text{c)} \quad y'' + y' - 2y = \cos(x) + \mathrm{ch}(x) \ , & \text{d)} \quad y'' - 2y' + y = e^x(x^2+1) \ , \\ \text{e)} \quad y'' - 3y' + 2y = e^x \sin(3x) \ , & \text{f)} \quad y'' + 3y' + 2y = e^{-x}(x^2+1) \ . \end{array}$$

Exercice 4 *Résoudre les équations différentielles suivantes (choisir pour chacune d'elles un intervalle adapté au calcul) :*

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad x^3y' + x^2y = x \ , \quad \text{b)} \quad e^x y' - e^x y = 2x \ , \quad \text{c)} \quad xy' + 2y = \dfrac{1}{1+x^2} \ , \\ \text{d)} \quad xy' + 2y = x^2 - 3 \ , \quad \text{e)} \quad (1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1 \ , \quad \text{f)} \quad y' + \tan(x)y = \dfrac{1}{\cos x} \ , \\ \text{g)} \quad xy' - xy = e^x \ , \quad \text{h)} \quad y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3 \ , \quad \text{i)} \quad y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x+1}{x} \ , \\ \text{j)} \quad y' + \cos(x)y = \dfrac{\sin(2x)}{2} \ , \quad \text{k)} \quad y' - \dfrac{2y}{x} = x^2e^x \ , \quad \text{l)} \quad xy' - 2y = x^3 \ . \end{array}$$

Exercice 5 *On considère l'équation différentielle :*

$$y' - 2xy + 2xy^2 = 0 \ . \qquad (1)$$

On cherche les solutions y *de* (1) *qui ne s'annulent pas sous la forme :*

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \ .$$

Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction u *? En déduire la forme des solutions de* (1) *qui ne s'annulent pas.*

Exercice 6 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad (x^2 - x)y' = y^2 + y \ , \quad \text{b)} \quad y' = \exp(x+y) \ , \quad \text{c)} \quad y' = y^2 \ , \\ \text{d)} \quad y' = \sqrt[n]{y} \ , \quad \text{e)} \quad y' = e^x y^2 \ , \quad \text{f)} \quad y' = x(y^2 - 1) \ . \end{array}$$

Exercice 7 *Montrer que l'équation différentielle :*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

possède pour solution particulière un polynôme. En déduire les solutions de cette équation différentielle.

Exercice 8 *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$y'' + 2y' - 5y = xe^{-x}\cos(2x) \ .$$

En déduire les solutions de cette équation différentielle.