Math I Analyse,
Feuille 4: Fonctions

1 Introduction : un peu de calculs.

Exercice 1. Pour les fonctions suivantes :
- Determiner le domaine de définition, l'image, les limites aux bornes du domaine et l'allure de la courbe.
- Ces fonctions sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$1.\ f(x) = \frac{x^2+2|x|}{x}\,, \qquad 2.\ g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\,,$$
$$3.\ h(x) = \frac{(\sin x)^2}{1+\cos x}\,, \qquad 4.\ j(x) = \tan x\,,$$
$$5.\ k(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\,.$$

Exercice 2. Calculer la limite des fonctions suivantes en la valeur de a donnée.

$$1.\ f_1(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}\,, a=1\,, \qquad 2.\ f_2(x) = x^2+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\,, a=0\,,$$
$$3.\ f_3(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\,, a=+\infty\,, \qquad 4.\ f_4(x) = 3+\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-1}\,, a=-\infty\,,$$
$$5.\ f_5(x) = \sqrt{x^2-1}-x\,, a=+\infty\,, \qquad 6.\ f_6(x) = \frac{1}{1-x}-\frac{2}{x^2-1}\,, a=1\,,$$
$$7.\ f_7(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\,, a=4\,, \qquad 8.\ f_8(x) = (x-2)^2\,\ln\left(x^3-1\right)\,, a=2\,.$$

Exercice 3. En utilisant uniquement le fait que $\sin(x)/x$ tend vers 1 quand x tend vers zéro, calculez les limites suivantes :

$$1.\ f(x) = \frac{\sin x}{\sin 3x},\quad a=0\,,\quad 2.\ f(x) = \frac{x^2\sin 1/x}{\sin x},\quad a=0\,.$$

2 Fonctions continues.

Exercice 4. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xE(1/x) & \text{si } x\neq 0\,,\\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points de continuité de f et tracer son graphe.

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$1. f(x) = \sin x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,, \qquad 2. g(x) = \frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\,,$$
$$3. h(x) = \frac{1}{x}\,\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\,.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique (on supposera que f a pour période 1). On suppose de plus que f a une limite en $+\infty$. Montrez que f est constante.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les restrictions de f à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont constantes. De plus, on suppose que f est continue en zéro. Montrez que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 ($\star$). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

On suppose de plus que f est continue. Montrez qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = \lambda x$.
Même question si on suppose f seulement continue en 0.

Exercice 9. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \,.$$

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
2. Montrer que, si $L > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty$.

Exercice 10.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en a. On suppose que $f(a) > 0$. Montrer la propriété suivante :

$$\exists \eta > 0 \,;\, \forall x \in [a - \eta, a + \eta], \quad f(x) > 0 \,.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction $|f|$ définie par $|f|(x) = |f(x)|$ est continue. La réciproque est-elle vraie ?
3. Soit f, g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit h l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \max\left(f(x), g(x)\right).$$

Indication : On pourra montrer que $h = \dfrac{|f - g| + g + f}{2}$.

3 Autour du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 11. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a, b]$, on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.
2. L'image réciproque par f de toute partie bornée de $\mathbb{R}$ est bornée .

Exercice 13. – Soit $a < b$ deux nombres réels, et $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. Montrez qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
– Soit f, g des applications continues de $[0, 1]$ dans lui-même, telles que $f \circ g = g \circ f$.

1. On pose $Y = \{y \in [0, 1] \,;\, f(y) = y\}$. Montrer que Y possède une borne supérieure et une borne inférieure. On les notera respectivement M et m.
2. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Y, qui converge vers a. Montrer que $a \in Y$.

3. Montrer que $M \in Y$ et $m \in Y$.
4. Montrer que $g(Y) \subseteq Y$.
5. Montrer que $g(M) \leq f(M)$ et $f(m) \leq g(m)$.
6. En déduire qu'il existe $\beta \in [0,1]$ tel que $f(\beta) = g(\beta)$.

Exercice 14. Un cycliste parcourt 90 km en quatre heures.

1. Est-il légitime de supposer que la fonction f donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est continue ?
2. Montrez qu'il existe un intervalle de deux heures pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 45 km.
3. Même question avec un intervalle de 80 minutes, et une distance de 30 km.

Exercice 15.

1. Soit $f \in \mathcal{C}\Big(]a,b[\Big)$ telle que $f\Big(]a,b[\Big) \subset [a,b]$. Montrer, en considérant la fonction $\varphi(x) = f(x) - x$, qu'il existe un point $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}\Big([0,1]\Big)$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un point $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
3. Un mobile parcourt à vitesse continue une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

4 Suites et fonctions continues.

Exercice 16. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle $f(0) = f(1)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\exists\, x_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]\,, f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n)\,.$$

Exercice 17. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On veut montrer que :

$$\sup_{a \leq x \leq b} \Big\{f(x)\Big\} = \sup_{a < x < b} \Big\{f(x)\Big\}\,.$$

1. Montrer que :

$$\sup_{a \leq x \leq b} \Big\{f(x)\Big\} \geq \sup_{a < x < b} \Big\{f(x)\Big\}\,.$$

   Indication : On pourra montrer que $\displaystyle \mathop{sup}_{a \leq x \leq b} \Big\{f(x)\Big\}$ *est un majorant de f sur* $]a,b[$.

2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = M$. Montrer que $f(x_0) = \displaystyle\sup_{a < x < b} \Big\{f(x)\Big\}$ en distinguant 3 cas : $x_0 = a$, $x_0 = b$, $x_0 \in]a,b[$. Pour le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.

Exercice 18. Etudier les suites récurrentes suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. u_0 = 0\,, & u_{n+1} = \ln(e - 1 + u_n)\,, \\ 2. u_0 = -8\,, & u_{n+1} = \cos u_n\,. \end{array}$$