Math I Analyse,
Feuille 5: Dérivation.

1 Introduction : un peu de calculs.

Exercice 1. Dire en quels points ces fonctions sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et donner leurs dérivées.

1. $f_1(x) = \cos(\cos x)$
2. $f_2(x) = \sqrt{|\sin x|}$
3. $f_3(x) = \sqrt{1 + \cos x}$

Exercice 2. Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,, & g(x) = x\sqrt{x+1}\sin x\,, \\ h(x) = \frac{x}{1+|x|}\,, & i(x) = x\,|x|\,, \\ j(x) = x \sin \ln x\,, & k(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\,. \end{array}$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad x \in \,]0,1] \\ \dfrac{2-\ln x}{4} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. En quels points la fonction f est-elle continue ?
2. En quels points est-elle dérivable ? En chacun des points, donner la valeur de la fonction dérivée.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,, \\ 2x + \lambda\, x^2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue.
2. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit dérivable.

Exercice 5. Déterminer les extrema de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Etudier la dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0\,, & \text{et } 1 \text{ si } x = 0\,, \\ g(x) = x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0\,, & \text{et } 1 \text{ si } x = 0\,, \\ h(x) = x^2\,\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0\,, & \text{et } 1 \text{ si } x = 0\,, \end{array}$$

Exercice 7 ($\star$). Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et dont la fonction dérivée est continue sur $[0,1]$). On suppose que $f(0) = 0$, et que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f(x) \geq mx$.

2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

Exercice 8. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ pour tout $x > 0$.

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable (de classe C^∞). On suppose que f s'annule $n+1$ fois, en les points $a_0 = a$, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, $a_n = b$.

1. Montrer que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, la fonction f' s'annule sur l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. En particulier, elle s'annule au moins n fois.
2. Montrer que la fonction $f^{(n)}$ s'annule sur $]a, b[$.

Exercice 10. Etudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

2.1 Problèmes.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, dérivable, qui tend vers 0 en plus l'infini et en moins l'infini. Montrez qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 12 (Examen 2007)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \exp(-\frac{x}{n}) - 2\,(1 - x)\,.$$

1. Dans cette question, l'entier $n > 0$ est fixé.
   a. Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   b. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   c. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
2. On considère maintenant la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
   a. Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(x_n)_n$ est décroissante.
   b. En déduire qu'elle converge. On notera x sa limite.
3. Il s'agit ici de calculer x.
   a. Montrer que $-\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b. Conclure.

Exercice 13. Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, on considère la fonction polynômiale de degré n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1\,.$$

1. Soit $n > 2$: Montrer que P_n a une unique racine réelle positive que l'on nommera α_n.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>2}$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera α.
3. Montrer que α est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.