Math I Analyse,
Feuille 6: Equations différentielles.

1 Résolutions explicites.

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ (quand c'est possible) les équations suivantes :

1. $2y' - 3y = 0$,
2. $y' + 2y = 0$,
3. $y'' + y = 0$,
4. $y'' - 4y' + 3y = 0$,
5. $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes en précisant le domaine d'existence des solutions :

1. $x^3\, y'(x) + x^2\, y(x) = x$,
2. $x\, y'(x) + 2\, y(x) = x^2$,
3. $y'(x) + cos(x)\, y(x) = 0$,
4. $(1 + x^2)\, y'(x) + x\, y(x) = 2\, x^2 + 1$,
5. $y''(x) + 4\, y(x) = x\, \sin x$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'' + y' - 12y = 0\,, \\ y(2) = 2\,, \\ y'(2) = 0\,. \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes en précisant le domaine d'existence des solutions :

1. $y' = y^2$,
2. $y'(x) = \exp(x + y(x))$,
3. $y'(x) = x\,(y^2(x) - 1)$,
4. $y' = \sqrt{y}$.

2 Problèmes.

Exercice 5. Un chimiste observe un gramme de l'isotope radioactif du carbone 14 (^{14}C). Les atomes constituant cet échantillon se désintègrent en azote stable (^{14}N). On note u la fonction décrivant la quantité de carbone radioactif en fonction du temps. La quantité d'atomes qui se désintègrent à chaque instant est proportionnelle à la quantité de matière radioactive présente. 5730 ans plus tard, notre chimiste a observé que la masse de son échantillon a diminué de moitié (l'autre moitié s'étant transformée en azote par désintégration). Déterminer la fonction u.
Application : au bout de combien de temps l'échantillon pèsera-t-il plus que $0,1$ gramme ?

Exercice 6 (Un principe du maximum.)**.** Soient f et g deux solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y' = a(t)\, y(t) + b(t)\,,$$

où a , $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, et $a(t) > 0\, \forall t \in \mathbb{R}$. Montrer que s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}\,, f(t) < g(t)\,.$

Exercice 7 (Un lemme de Gronwall.)**.** Soient y et φ deux fonctions de $\mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R}^+)$, et soit c une constante positive. On suppose qu'elles vérifient, $\forall t \in [a,b]$:

$$y(t) \leq c + \int_a^t \varphi(s)\, y(s)\, \mathrm{d}s\,. \tag{1}$$

Montrer que $\forall t \in [a,b]$:

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \varphi(s)\, \mathrm{d}s\right)\,.$$

Indication : introduire les fonctions $F(t) = \displaystyle\int_a^t \varphi(s)\, y(s)\, \mathrm{d}s$ et $G(t) = F(t) \exp\left(-\displaystyle\int_a^t \varphi(s)\, \mathrm{d}s\right)$. Puis, trouver une inégalité vérifiée par $G'(t)$ pour tout $t \in [a,b]$ en utilisant l'inégalité (1). Enfin, intégrer de a à t l'inégalité obtenue et conclure.