Math I Analyse,
Feuille 1: Manipulation des nombres réels

1 Inégalités

Exercice 1. Soit deux nombres rèels a et b vèrifiant : $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$. Donner un encadrement de $a - b$ et de a/b.

Exercice 2. Montrer en utilisant la formule du binôme de Newton que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ , \ \sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$$

Exercice 3. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels compris entre 0 et 1. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \ \geq \ 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$. Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1] \ , \ \frac{1}{e} \ \leq \ f(x) \ \leq \ 1$$

Exercice 5. Soit x un nombre réel. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, n entier, l'implication

$$(x > -1 \ , \ x \neq 0) \Rightarrow ((1 + x)^n > 1 + nx)$$

est vraie.

Exercice 6. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A-t-on équivalence entre les deux propositions suivantes ?
- $\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A \quad x \geq \alpha$
- $\forall x \in A \quad x > 0$

2 Valeurs absolues

Exercice 7. Soit $f(x) = \frac{x \ \sin\left(x^3+1\right)+3 \sqrt{x} \ \cos x}{x^4+2x-3}$. Montrer que : $\forall x \in [2, +\infty[, \ |f(x)| \leq 1/2$.

Exercice 8. Pour toutes les fonctions f suivantes, tracer l' allure des courbes de f, $|f|$, $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$.
1. $f(x) = x^3 - 3\,x$.
2. $f(x) = \cos(x)$.
3. $f(x) = \ln(2\,x + 1)$.
4. $f(x) = \exp(-3\,x - 6)$.

Exercice 9. Soient x et y deux réels. Montrer que l'on a :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad , \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Une formule du même type pour $\max(x, y, z)$?

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\left(\forall \epsilon > 0 \quad |x| \leq \epsilon\right) \Rightarrow \left(x = 0\right)$.

3 Parties entières

Pour un nombre réel x, on notera $E(x)$ sa partie entière et $[x]$ sa partie fractionnaire.

Exercice 11. Pour toutes les fonctions f suivantes, tracer les allures des courbes de f, $|f|$, $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \min(f, 0)$.

1. $f(x) = E\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $f(x) = E(x^2)$.
3. $f(x) = E(\sin(x))$.
4. $f(x) = [x]$.

Exercice 12. On désigne par $E(x)$ la partie entière du nombre réel x. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E\,(x)$$

Exercice 13.
1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
2. $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}\ ,\ E(x+n) = E(x) + n$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}\ , \forall x \in \mathbb{R}\ , E(x) = E\left(\frac{E(n\,x)}{n}\right)$.
4. Dèterminer $\lim E(x)$ et $\lim [x]$ lorsque x tend vers -1_+ et lorsque x tend vers -1_-. Ces fonctions ont-elles une limite lorsque x tend vers -1 ?

4 Réels et rationnels

Exercice 14. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $r + x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que, si $r \neq 0$, $r\,x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 15. Soient x, $y \in \mathbb{Q}^+$, tels que $\sqrt{x}$ ou $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 16. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

1. $(x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q})\ \Rightarrow\ (x + y \in \mathbb{Q})$
2. $(x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\ \Rightarrow\ (x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\,(\forall y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\, x < y\ \Rightarrow\ \exists z \in \mathbb{Q}\,|\, x < z < y$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\,(\forall y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\, x < y\ \Rightarrow\ \exists z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,|\, x < z < y$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3(n \text{ impair }\ \Rightarrow\ \sqrt{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$

Exercice 17 (*Difficile*)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f(n) = n\,f(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ f(n) = n\,f(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q}\ ,\ f(q) = q\,f(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x\,f(1)$. [On pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x.]