Math I Analyse,
Feuille 2: Borne supérieure, borne inférieure, intervalles

## 1 Manipulation des définitions et exercices théoriques

**Exercice 1.** Soient $A,\ B$ deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On pose $A+B=\{x+y,\ x\in A,\ y\in B\}$. Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

**Exercice 2.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x\in A,\quad \forall y\in B,\quad x<y.$$

Montrer que $A$ admet une borne supérieure, et $B$ admet une borne inférieure. Comparer $\sup A$ et $\inf B$.

**Exercice 3.** (*) Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\limits_{x,y\in A}|x-y|=\sup A-\inf A$.

**Exercice 4.** Soit $A$ partie de $\mathbb{R}$. Ces deux propriétś sont-elles équivalentes ?

$$\forall\, x\in A,\ x>0 \tag{1}$$

et

$$\exists \alpha>0:\forall\, x\in A,\ x\geq\alpha \tag{2}$$

**Exercice 5.** On considère un intervalle ouvert $I\subseteq\mathbb{R}$, et $x\in I$. Montrez la proposition suivante :

$$\forall x\in I\quad \exists\varepsilon>0\quad ]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset I.$$

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists\varepsilon>0\quad \forall x\in I\quad ]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset I.$$

*Indication : faire un dessin.*

## 2 Exercices techniques

**Exercice 6.** Donner, s'il existe, le sup, l'inf, le maximum et le minimum des sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$[0,1],\ [0,1[,\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}\cap[0,\sqrt{2}[,\ \left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\},\ \{(-1)^n,\ n\in\mathbb{N}^*\},$$
$$\left\{(-1)^n+\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\},\ \left\{\frac{1+x}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}^+\right\}.$$

**Exercice 7.** Soit $J=\left\{x\in\mathbb{R}\ \text{t. q.}\ -2<x+\dfrac{1}{2x}\leq 2\right\}$. $J$ est-il un intervalle ?

**Exercice 8.** Soit $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrez que $A$ possède une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

**Exercice 9.** Soit $A = \left\{\dfrac{m}{mn+1},\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Montrer que 1 est un majorant de A et que 0 est un minorant de $A$. Montrer que ce sont respectivement les bornes sup et inf de $A$. Le nombre 1 (resp 0) est il un max (resp min).
Reprendre l'exercice avec $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 10.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-x^2)$. On considère l'ensemble $A = \{f(x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$. Calculer $\sup A$, $\inf A$. L'ensemble $A$ a-t-il un maximum, un minimum ?
Mêmes questions pour la fonction $g : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(\pi/x)$.

**Exercice 11.** Soit $A = \{x^2+y^2, x, y \in \mathbb{R} \text{ et } xy = 1\}$, $B = \{xy, x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x^2+y^2 \leq 2\}$. Donner, s'il existe, le sup, l'inf, le maximum et le minimum de $A$ et $B$.

Indications : pour $A$ on pourra étudier la fonction $x \rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ; pour $B$ on posera $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ avec $0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.