Test de rentrée en Math I Analyse, septembre 2008.

Répondre aux questions 1, 2 et 3 directement sur cette feuille.

1. Entourer les égalités vraies pour tout x réel :

$$\sqrt{(-x)^2} = x \qquad \sqrt{x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x^2} \qquad \sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{x^4} = x^2.$$

2. Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes.
   - Pour tout réel a strictement positif, $\dfrac{a^2+1}{2a} \leq 1$.
   - Pour tout réel a strictement positif, $\dfrac{a^2+1}{2a} \geq 1$.
   - Il existe un réel a strictement positif tel que $\dfrac{a^2+1}{2a} = 1$.
3. Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes.
   - Pour tout réel a strictement positif, $1/a \geq 0$.
   - Il existe un réel a strictement positif tel que $1/a \leq 0$.
   - Il existe un réel a strictement positif tel que $1/a = 0$.
4. Pour un réel x donné, on considère la *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n := x^n/(x^n+1)$. Discuter, selon les valeurs de x, la monotonie (croissance ou décroissance), la convergence de cette suite et donner sa limite si elle existe.
5. Pour un entier naturel n donné on considère la *fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^n}{x^n+1}. \end{array}$$

   Cette fonction est-elle continue ? dérivable ? A-t-elle une limite en 0 ? en $+\infty$?

6. On considère les fonctions

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln x\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\ln x)^2\,, \end{array}$$

   et l'on note C_f, C_g leurs courbes dans un repère orthonormal. Montrer que la courbe C_f est au dessus de la courbe C_g sur l'intervalle $[1, e]$. Pour $x \in [1, e]$, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et N le point de la courbe C_g de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

7. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n\,.$$

   Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n u_0\,.$$

8. Soit un réel a. Résoudre l'équation différentielle

$$u' = au\,.$$

   Application numérique : $a = 0,014$, $u(0) = 60000000$.
   On considère une population immortelle dont le taux de natalité est de $14‰$ par an. La population étant de 60 millions d'habitants en 2008, pouvez-vous calculer la population en 2010 ?