

Test de rentrée en Math I Analyse, septembre 2009.

NOM :

Prénom :

Numéro étudiant :

Signature :

Répondre aux questions directement sur cette feuille dans les emplacements prévus.

1. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $|x - 2| \leq 3$ et $|x + 1| \geq 2$. Représenter graphiquement (sur un axe) cet ensemble.

2. Même question avec l'ensemble des réels x tels que $x^2 - x \leq 1$.

3. On considère la *fonction*

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x + 2}. \end{array}$$

Cette fonction est-elle continue ? dérivable ? A-t-elle une limite en -2 , en $+\infty$, en $-\infty$ (si oui donner leurs valeurs) ? Représenter son graphe dans un repère orthonormé.

4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n := 2^{n+1}/(2^n + 1)$. Étudier la convergence de cette suite et donner sa limite si elle existe.

5. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \pi u_n.$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \pi^n u_0.$$

6. Soit un réel a . Résoudre l'équation différentielle

$$u' = au.$$

Application numérique : $a = 0,01$, $u(0) = 5000000$.

On considère une population immortelle dont le taux de natalité est de 10‰ par an. La population étant de 5 millions d'habitants en 2008, pouvez-vous calculer la population en 2010 ?