

Math I Analyse, Équations Différentielles.

Décembre 2008

Limites, continuité

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y' - 3y = 0$;
2. $y' + 2y = 0$;
3. $y'' + y = 0$;
4. $y'' - 4y' + 3y = 0$;
5. $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 2. Trouver l'équation de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' - 12y = 0$$

qui vérifie $y(2) = 2$ et $y'(2) = 0$.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes en précisant à chaque fois le domaine sur lequel on résout :

1. $x^3y' + x^2y = x$;
2. $xy' + 2y = x^2$;
3. $y' + \cos(x)y = 0$;
4. $(1 + x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$.

A-t-on des solutions définies sur \mathbb{R} entier ?

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles non linéaires suivantes :

1. $y' = y^2$;
2. $y' = \exp(x + y)$;
3. $y' = x(y^2 - 1)$;
4. $y' = \sqrt{y}$.

A-t-on des solutions définies sur \mathbb{R} entier ? A-t-on parfois non-unicité des solutions ?

Exercice 5. Un chimiste observe un gramme de l'isotope radioactif du carbone ^{14}C . Les atomes constituant cet échantillon se désintègrent en azote stable ^{14}N . On note u la fonction décrivant la quantité de carbone radioactif en fonction du temps. La quantité d'atomes qui se désintègrent à chaque instant est proportionnelle à la quantité de matière radioactive présente.

5 730 ans plus tard, notre chimiste a observé que la masse de son échantillon a diminué de moitié (l'autre moitié s'étant transformée en azote par désintégration).

Donnez la fonction u .

Application : au bout de combien de temps l'échantillon de pèsera-t-il plus que 0,1 gramme ?