Math I Analyse,
Fonctions.

Novembre 2008

Limites, continuité

Exercice 1. Tracer le plus rapidement possible l'allure des graphes des fonctions identité, carré, cube, racine carrée, exponentielle, logarithme, cosinus, sinus, tangente.

Exercice 2. Calculez la limite des fonctions suivantes en la valeur de a donnée.

$$1. f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}, \quad a=1 \qquad 2. f(x) = x^2 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \quad a=0$$

$$3. f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}, \quad a=+\infty \qquad 4. f(x) = 3+\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2-1}, \quad a=-\infty$$

En utilisant uniquement le fait que $\sin(x)/x$ tend vers 1 quand x tend vers zéro, calculez les limites suivantes :

$$1. f(x) = \frac{\sin x}{\sin 3x}, \quad a=0 \quad 2. f(x) = \frac{x^2 \sin 1/x}{\sin x}, \quad a=0$$

Exercice 3. Vrai ou faux ?

1. La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.
2. La somme d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce même point est discontinue en ce point.
3. La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.
4. Le produit de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.
5. Le produit d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xE(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points de continuité de f et tracer son graphe.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique (on supposera que f a pour période 1). On suppose de plus que f a une limite en $+\infty$. Montrez que f est constante.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les restrictions de f à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont constantes. De plus, on suppose que f est continue en zéro. Montrez que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 ($\star$). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$$

On suppose de plus que f est continue. Montrez qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = \lambda x$.
Même question si on suppose f seulement continue en 0.

Exercice 8. a. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en a. On suppose que $f(a) > 0$, montrez la propriété suivante :

$$\exists \eta > 0 \,;\, \forall x \in [a - \eta, a + \eta], \quad f(x) > 0$$

b. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que la fonction $|f|$ définie par $|f|(x) = |f(x)|$ est continue. La réciproque est-elle vraie ?
c. Soit f, g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit h l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Indication : On pourra montrer que $h = \dfrac{|f-g| + g + f}{2}$.

Exercice 9. Un cycliste parcourt 90 km en quatre heures.

1. Est-il légitime de supposer que la fonction f donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est continue ?
2. Montrez qu'il existe un intervalle de deux heures pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 45 km.
3. Même question avec un intervalle de 80 minutes, et une distance de 30 km.

Exercice 10. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que l'on ait $f(x_n) = f(x_n + 1/n)$.

Exercice 11. a. Soit $a < b$ deux nombres réels, et $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. Montrez qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
b. Soit f, g des applications continues de $[0, 1]$ dans lui-même, telles que $f \circ g = g \circ f$.

1. On pose $Y = \{y \in [0, 1] \,;\, f(y) = y\}$. Montrez que Y possède une borne supérieure et une borne inférieure. On les notera respectivement M et m.
2. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Y, qui converge vers a. Montrez que $a \in Y$.
3. Montrez que $M \in Y$ et $m \in Y$.
4. Montrez que $g(Y) \subseteq Y$.
5. Montrez que $g(M) \leq f(M)$ et $f(m) \leq g(m)$.
6. En déduire qu'il existe $\beta \in [0, 1]$ tel que $f(\beta) = g(\beta)$.