Math I Analyse, Feuille de TD 1
Compétences en logique et exercices

Semaine du 15 septembre 2008

Compétences à acquérir en logique

1 Négation d'une proposition P

- La négation logique transforme une propriété vraie en une propriété fausse ; une propriété fausse en une propriété vraie ; une propriété en une nouvelle propriété qui est satisfaite exactement lorsque la première n'est pas satisfaite. La proposition « non P » s'écrit $\neg P$.
- Comprendre que si P est vraie, alors non P est fausse, et si P est fausse, alors non P est vraie.
- La négation d'une proposition n'est pas son « contraire » (même si des fois cela peut être le cas).
- Savoir nier une proposition est une compétence à acquérir.

2 Implication $P \Rightarrow Q$

- L'énoncé $P \Rightarrow Q$ est équivalent à l'énoncé « non P ou Q » $((\neg P) \vee Q)$.
- Il faut connaître les tables de vérité de $P \Rightarrow Q$.
- Comprendre que $P \Rightarrow Q$ est vraie lorsque P est fausse.
- Savoir manipuler la contraposition : $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.
- Savoir nier une implication : $\neg(P \Rightarrow Q)$ équivaut à $P \wedge (\neg Q)$. Notamment, **la négation d'une implication n'est pas une implication**.
- Notion de condition nécessaire, condition suffisante.

3 Les quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition dépendant de x.
L'énoncé : $[\forall x \in A,\ P(x)]$ (qui se lit « Pour tout x appartenant à A $P(x)$ ») est vrai si et seulement si tous les objets du domaine (ici l'ensemble A) satisfont la propriété P. Sinon, il est faux.
L'énoncé : $[\exists x \in A,\ P(x)]$, (qui se lit : « Il existe x dans A tel que $P(x)$ ») est vrai si et seulement si l'énoncé $[\forall x \in A\ \neg P(x)]$ est un énoncé faux.
Par conséquent :
- La négation de $[\forall x \in A,\ P(x)]$ est $[\exists x \in A,\ \neg P(x)]$.
- La négation de $[\exists x \in A,\ P(x)]$ est $[\forall x \in A,\ \neg P(x)]$.

Exercices

Exercice 1. Donnez la négation mathématique des phrases suivantes :

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si le nombre entier n est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle à valeurs réelles.

5. f est positive ($\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0$).
6. f est paire sur $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)$).

Exercice 2. Soient les propositions P : « J'ai mon permis de conduire », et Q : « J'ai plus de 18 ans ».
Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont-elles vraies ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 3. Complétez, lorsque c'est possible, avec les quantificateurs $\forall$ ou $\exists$, pour que les énoncés suivants soient vrais.

1. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$;
2. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 3x + 3 = 0$;
3. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad 2x + 1 = 0$;
4. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x + 3 = 0$.

Exercice 4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, écrivez leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, \quad x^2 > 7$;
2. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x^2 > 7$;
3. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N}, \quad y > x^2$
4. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N}, \quad y > x^2$.

Exercice 5. On considère la proposition P suivante :
« Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x. »

1. Écrivez la proposition P avec des symboles (quantificateurs) mathématiques.
2. Écrivez la négation de P avec des quantificateurs, puis énoncez-la en français.

Exercice 6. Soient P, Q et R trois propositions. Donnez la négation des propositions suivantes :

1. $P \wedge (\neg Q \vee R)$;
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.

Exercice 7. Notons E l'ensemble des étudiants de Lyon 1, et S l'ensemble des jours de la semaine. Pour l'étudiant $x \in E$, on note $h_j(x)$ son heure de réveil le jour $j \in S$.

1. Écrivez avec des quantificateurs la proposition : « Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h. »
2. Écrivez ensuite la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques, puis en français.