Math I Analyse, Feuille de TD 1
Nombres réels, bornes supérieures et inférieures

Semaine du 22 septembre 2008

Raisonner sur les nombres réels

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que : $\forall \varepsilon > 0 \quad \big(|x| \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0\big)$.

Exercice 2.

1. Montrez que : $\forall x \in [0,1], 0 \leq x \leq 1/4$.
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall (a,b,c) \in [0,1]^3, \min\big((a(1-b), b(1-c), c(1-a)\big) \leq \frac{1}{4}.$$

On pourra supposer, après l'avoir justifié, que $a \leq b \leq c$.

Exercice 3. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}.$$

Exercice 4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A-t-on toujours équivalence entre les deux propositions suivantes ?

- $\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A \quad x \geq \alpha$;
- $\forall x \in A \quad x > 0$.

Exercice 5 (Sommes géométriques)**.** Soit α un nombre réel différent de 1. On considère la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n.$$

Montrez que $S_n = \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$.

1. Le montrer par récurrence.
2. Le montrer en calculant $(1-\alpha)S_n$ et en simplifiant.

Que vaut alors $\sum_{k=n_1}^{n_2} \alpha^k$?

Exercice 6 (Sommes arithmétiques)**.** Montrer l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$(a_1 + \dots a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Indication : on pourra commencer pour $n = 1$, $n = 2$, puis faire une récurrence.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que n ne soit le carré d'aucun entier. Montrez que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
On pourra raisonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{n} = p/q$ sous forme d'une fracion irréductible.

Exercice 9. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(x/2) + \mathrm{E}((x+1)/2) = \mathrm{E}(x)$.

Bornes supérieures, Bornes inférieures

Exercice 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-x^2)$. Etudier les variations et les limites de f. On considère l'ensemble $A = \{f(x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$. Calculer $\sup A$, $\inf A$. L'ensemble A a-t-il un maximum, un minimum ?
Mêmes questions pour la fonction $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(\pi/x)$.

Exercice 11. Soit $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrez que A possède une borne inférieure et une borne supérieure, et les déterminer.

Exercice 12. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad x < y$$

Montrer que A admet une borne supérieure, et B admet une borne inférieure. Comparer $\sup A$ et $\inf B$.

Exercice 13. On considère un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$, et $x \in I$. Montrez la proposition suivante :

$$\forall x \in I \quad \exists \varepsilon > 0 \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I.$$

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I.$$

Indication : faire un dessin !

Exercice 14. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A + B := \{a + b\,;\, a \in A,\, b \in B\}$ est majorée, et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 15. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{x,y \in A} |x - y| = \sup A - \inf A$.

Exercice 16 ([$\star\star$] Sous groupes additifs de $\mathbb{R}$.)**.** Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ si pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $x \in A$ tel que $x \in]a, b[$.
Montrez que :
- Soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{R}_+$;
- Soit G est dense dans $\mathbb{R}$.