Suites réelles

13 octobre 2008

Rappels : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite.

On dit que (u_n) “converge vers l”, ou “tend vers l” ou “a pour limite l” lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \varepsilon$$

(intuitivement : u_n est aussi proche de l qu'on veut si n est assez grand)
On note alors $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = l$.

On dit que (u_n) “diverge vers $+\infty$”, ou “tend vers $+\infty$' lorsque

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq M$$

(intuitivement : u_n est aussi grand qu'on veut si n est assez grand) On note de même $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = +\infty$.

On dit qu'une suite est croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$.
On dit qu'une suite est décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.
On dit qu'une suite est bornée lorsque $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, $\forall n :\ u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \longrightarrow \infty} |u_n - v_n| = 0$.
Le *théorème des suites adjacentes* dit que deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

1. En n'utilisant que la définition d'une limite montrer que :
$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n} = 0,\ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 2n = +\infty,\ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{n}{2} = +\infty,\ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{3n-1}{2n+3} = \dfrac{3}{2}$

2 Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé et (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) Calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
3) La suite (u_n) est-elle monotone ? Si oui, préciser si elle est croissante ou décroissante en fonction du signe de r.
4) La suite est-elle convergente ? Bornée ?

On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
5) Calculer le terme général v_n en fonction de n. La suite (v_n) est-elle convergente ?

3. Etudier l'existence d'une limite pour les suites suivantes.

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$ b) $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$ c) $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ d) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

e) $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ f) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

g) $u_n = \frac{3n^2+2}{5n+1}$ h) $u_n = n\cos n + 2n$

4. Dans les cas suivants, la suite (u_n) est-elle monotone ? Si non, a-t-elle des sous suites monotones ?
$u_n = (-1)^n$, $u_n = n + (-1)^n$, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$, $u_n = n^2$,
$u_n = n + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
(pour le dernier cas, on pourra calculer et comparer u_0, u_1, u_2, u_3)

5. Montrer avec les définitions de convergence que si (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors la suite $(u_n + v_n)$ est convergente.

6. Montrer que si (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ diverge également vers $+\infty$.

7. Soit (u_n) une suite. Les propriétés suivantes sont elles équivalentes ?
(P_1) $\exists A \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A$
(P_2) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists A \in \mathbb{R} : \ u_n = A$

8. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle divergeant vers $+\infty$. Montrer que $\inf\{u_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ est un min (c'est-à-dire : cet ensemble admet un plus petit élément).

9. 1) a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
b) Soit $a > 1$. En écrivant $a = 1 + b$, avec $b > 0$, montrer que $(a^n) \geq 1 + nb$.
c) En déduire que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a^n = +\infty$
2) En déduire que si $0 \leq a < 1$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a^n = 0$.
3) Si $a \geq 0$, conclure que $u_n = a^n$ est convergente si et seulement si $0 \leq a \leq 1$.

10. 1) Soit (u_n) une suite réelle.
a) On suppose : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ k \in]0,1[: \forall n \geq n_0,\ |u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = 0$
b) On suppose : (u_n) est à valeurs positives et $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ k > 1 : \forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \geq k u_n$. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
c) Application : montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.
2) Généralisation : on considère (u_n) suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers l.
Montrer que
a) Si $l > 1$, $u_n \longrightarrow +\infty$
b) Si $l < 1$ alors $u_n \longrightarrow 0$.
Indication pour a) (respectivement pour b) : montrer qu'il existe $k > 1$ (respectivement $k < 1$), $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq k u_n$ (respectivement $u_{n+1} \geq k u_n$)

11. Montrer à l'aide d'exemples que :
(i) Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = +\infty$, on ne peut rien dire sur la convergence de la suite $(u_n v_n)$.
(ii) Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0$, on ne peut rien dire sur la convergenre de la suite (u_n/v_n).

12. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$ est convergente, et calculer sa limite. (penser à multiplier par $\sqrt{n^2+n} + n$...)

13. Montrer que les suites (u_n) suivantes sont convergentes, et calculer leur limite :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$$

14. a) Soit (u_n) telle que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l. Montrer qu'alors u_n converge vers l.
b) Soit (u_n) telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes (cette fois sans hypothèse sur la valeur de leur limite). Montrer que les trois limites sont en fait égales, et que u_n converge vers cette limite.

15. a) Soit (u_n) une suite à valeur dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire (c'est à dire : constante à partir d'un certain rang).
b) Soit (u_n) telle que $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ soit fini. Montrer que la suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire (on pourra introduire $\varepsilon = \inf\{|x-y|,\ (x,y) \in E,\ x \neq y\}$ et justifier que $\varepsilon > 0$).

16. Le théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle, on définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.
1) On suppose que (u_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.
a) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N,\ |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
b) En déduire que $\forall\, n \geq N,\ |\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
c) Montrer qu'il existe $N' \geq N :\ \forall n \geq N',\ |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
d) En déduire que $\forall\, n > N'$, $|v_n| \leq \varepsilon$, et conclure que (v_n) converge vers 0.
2) On suppose que (u_n) converge vers l, montrer que (v_n) converge vers l.
Indication : considérer la suite $u_n - l$ et appliquer le 1).
3) Que peut on dire de v_n lorsque u_n tend vers $+\infty$?
4) Le lemme de l'escalier : soit (u_n) une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)$ soit convergente de limite l. Montrer que $(\frac{u_n}{n})$ est convergente de limite l.
Indication : appliquer le théorème de Césaro à la suite $(u_{n+1} - u_n)$.

17. Série harmonique.
Soit (H_n) définie par $H_0 = 0$, et pour $n \geq 1 :\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
0) Etudier la monotonie de H_n.
1) Montrer que $\forall\, m \in \mathbb{N},\ H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.
2) En déduire $H_{2^m} \geq \frac{m}{2} + 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n \geq \frac{1}{2}(\log_2 n + 1)$.
Indication : utiliser m tel que $m \leq \log_2 n \leq m+1$, et remarquer que pour m ainsi défini, $H_{2^m} \leq H_n$.
3) Conclure : la suite (H_n) diverge vers $+\infty$.
4) Aboutir au résultat directement en montrant que (H_n) n'est pas de Cauchy.

18. On définit la suite (u_n) par $u_n = \frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + \cdots + \frac{\sin n}{3^n}$. Montrer que la suite (u_n) est de Cauchy. Conclure.

19. Le nombre e :
On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.\,n!}$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On admettra que leur limite commune est e.
Montrer que e est irrationnel.
Indication : raisonner par l'absurde : on suppose que $e = \frac{p}{q}$, alors $u_q \leq e \leq v_q$, en utilisant le fait que $e.q!$ est entier, montrer que $e = u_q$ et expliquer en quoi c'est absurde.