Maths I Analyse :
Transition du Secondaire à l'Université

1 Objectifs de l'UE

Les objectifs visés sont les suivants.

- Compétences de nature méthodologique et/ou conceptuelle :
  - Comprendre les propriétés fondamentales de l'ensemble des réels, du point de vue algébrique, et surtout analytique (axiome fondamental de l'analyse : principe de la borne sup).
  - Savoir faire des démonstrations avec des epsilon (ϵ) : suite convergente ; limite, continuité, dérivabilité d'une fonction, critère de Cauchy pour les suites et les fonctions.
  - Notions à consolider : fonction, équation différentielle.
  - Notions à assimiler : relation d'ordre, suite extraite, continuité.
- Compétences techniques :
  - Manipulation d'inégalités dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire majorer et minorer, avec des valeurs absolues, des parties entières, des puissances entières, des racines n-ièmes.
  - Calculs de limites (élémentaires) de suites et de fonctions.
  - Exploitation de tableaux de variations pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  - Calcul des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 coefficients

2 Prérequis de Terminale pour aborder l'UE

2.1 Connaissance des fonctions

2.1.1 Limites

- Fonctions usuelles (exp, ln, fonctions trigonométriques, fonctions puissances entières, fonctions racines n-ièmes, polynômes du second degré, ...).
- Théorème "des gendarmes" pour les fonctions.
- Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières, et logarithme. A l'infini,l'exponentielle "l'emporte" sur toute puissance de x et les puissances de x "l'emportent" sur le logarithme.

2.1.2 Continuité et variations

- Plutôt qu'une définition, une **intuition** de la continuité d'une fonction.
- Théorème des valeurs intermédiaires : soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
- Existence d'une solution de l'équation du type $f(x) = k$.
- Zéros d'une fonction.
- Sens de variation d'une fonction (monotonie, croissance, décroissance).
- Définition d'un maximum, d'un minimum : sur un dessin.

2.1.3 Dérivation

- Dérivées des fonctions usuelles (exp, ln, fonctions trigonométriques, fonctions puissances entières, fonctions racines n-ièmes, polynômes du second degré, ...).
- On ne définit pas vraiment ce qu'est une fonction dérivable. Mais on fait le lien : **dérivable $\Rightarrow$ continue**.
- Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.
- Définition du maximum ou du minimum d'une fonction dérivable.

2.1.4 Primitives et calcul intégral

- Intégrale et valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque. Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe.
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles.
- Inégalité de la moyenne.
- Définition d'une primitive d'une fonction continue : si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.
- Primitives des fonctions usuelles (exp, ln, fonctions trigonométriques, fonctions puissances entières, fonctions racines n-ièmes, polynômes du second degré, ...).
- Intégration par parties.

2.2 Compétences techniques à avoir sur les fonctions

- **Représenter l'allure de la courbe d'une fonction à main levée.**
- Calculer la limite d'une fonction en un point, calculer la limite de la somme, du produit, du quotient, de la composition de 2 fonctions.
- Calculer la dérivée de la somme, du produit, du quotient, de la composition de 2 fonctions.
- Comparer deux fonctions : manipulation du signe $\leq$.
- Calculs d'aires de domaines délimités par la courbe représentative d'une fonction sur un intervalle.

– Reconnaître des primitives de compositions de fonctions, calculer des primitives par intégration par partie.

2.3 Connaissance des suites et récurrence

2.3.1 Définition d'une suite et propriétés

– Définition explicite
– Définition implicite
– Définition par récurrence
– Suites usuelles (arithmétiques, géométriques, ...)
– limite de suites
– théorème "des gendarmes".
– Définition d'une suite monotone, majorée, minorée, bornée.
– Théorème de convergence des suites croissantes majorées (resp. décroissantes minorées).
– Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes :
Théorème. (des suites adjacentes :) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **réelles** adjacentes (où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante). Alors ces deux suites sont convergentes, et ont la même limite l. De plus, pour tout entier naturel n, $a_n \leq l \leq b_n$.
Ce théorème est une conséquence de la **propriété de la borne supérieure** que l'on abordera dans l'UE : tout ensemble de réels non vide et majoré possède une borne supérieure. Ce théorème est donc essentiellement lié aux propriétés intrinsq̀ues de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. C'est pourquoi il est primordial, avant d'approfondir l'analyse réelle de formaliser rigoureusement toutes les propriétés de $\mathbb{R}$.
Remarque: . On peut en fait démontrer que ce théorème est équivalent à la propriété de la borne supérieure. Et cela pourra être utile dans certains problèmes d'analyse.

2.3.2 Raisonnement par récurrence

– " Définition " d'un raisonnement par récurrence : initialisation + hérédité.

Le raisonnement par récurrence est un outil puissant qui permet de faire des démonstrations rigoureuses en mathématiques. Il sera donc rappelé à l'université, autant dans les modules d'algèbre que ceux d'analyse, et utilisé très souvent.

2.4 Compétences techniques à avoir sur les suites

– Calculer les premiers termes d'une suite, **représenter graphiquement les termes d'une suite**.
– Calculer la limite d'une suite, la limite de la somme, du produit, du quotient de suites.

– Faire un raisonnement par récurrence simple lorsqu'il est demandé dans un exercice.

2.5 Une idée des equations différentielles

La théorie des equations différentielles est immense et nécessite, pour être développée avec soin, plus d'un an d'université. C'est pourquoi elles sont abordées dans le secondaire, comme dans cette UE sous un aspect technique et calculatoire. Un résultat d'existence d'une unique solution pour un certain type d'équation différentielle peut être énoncé, mais pour le démontrer, il faudra attendre la troisième année de licence.

– Savoir résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants : $ay' + by + c = 0$.
– Eventuellement connaître les solutions d'une équation différentielle linéaire du second oredre à coefficients constants particulière : $y'' + \omega^2 y = 0$, introduite en cours de physique.

3 Rentrée à l'Université : vers l'autonomie

Si un exercice de terminale est détaillé, et guide l'élève pas à pas dans ses calculs pour obtenir le bon résultat, il en est autrement à l'université. Outre les nouvelles notions (assez nombreuses) qu'il faudra assimiler, il faudra également commencer à prendre des initiatives dans la résolution d'un exercice ou d'un problème. Par exemple, si l'on veut étudier les variations d'une fonction, on ne demandera plus de calculer sa dérivée, de factoriser cette dérivée pour en déterminer le signe, puis d'en déduire le sens de variation de la fonction. Un autre exemple : si l'on veut montrer un résultat vérifié par tous les termes d'une suite, il faudra que l'étudiant prenne l'initiative d'essayer de le montrer par récurrence par exemple, ou il devra chercher une autre manière de le démontrer. Voici une liste (evidemment non exhaustive !) des compétences que l'on demandera d'acquerir au cours de l'UE Math I Analyse :

3.1 Savoir dresser le tableau de variation d'une fonction

– Que contient-il ?
  – Ensemble de définition
  – Etude des variations à partir du calcul de la dérivée ? et de l' étude de son signe
  – Limites aux bornes de l'intervalle
  – Noter et calculer si possible les maximum et minimum de la fonction
  – Tenter de trouver les zéros de la fonction ce qui permet de déterminer le signe de la fonction sur les bons intervalles
– A quoi peut-il servir ?
  – Déterminer les maximums et minimums d'une fonction
  – Pouvoir majorer et minorer la fonction sur un ou plusieurs intervalles
  – Visualiser les zéros de la fonction

  - Déterminer le signe de la fonction, intervalle par intervalle
  - Tracer rapidement l'allure de la courbe : mise en valeur des limites, des asymptotes, des tangentes horizontales (extremum), des zéros de la fonction
  - ...

3.2 Tracer l'allure de la courbe représentative d'une fonction

- Etablir le tableau de variation
- Placer les points caractéristiques qui aident à tracer (les zéros notamment)
- Déterminer au moins les asymptotes (verticales, horizontales)
- Essayer d' évaluer la "vitesse" de convergence au voisinage de l'infini : croissance linéaire (asymptote diagonale), exponentielle, logarithmique ?

3.3 Savoir manipuler des inégalités dans $\mathbb{R}$

- Passer d'une inégalité à une autre inégalité équivalente
  - Rajouter ou soustraire un même terme aux 2 membres de l'inégalité
  - Changer un terme de côté en changeant son signe
  - Multiplier (ou diviser) par un réel non nul les 2 membres de l'inégalité
- Trouver le signe d'une expression
  - Polynôme
  - Fonctions usuelles
  - Identités remarquables
  - Etudier la fonction
  - Trouver un majorant ou un minorant d'une expression
  - Etudier la fonction
  - Majorations et minorations par des expressions dont on connaît le signe
  - Utiliser les sens de variations d'une fonction : si a, b appartiennent à Iet $a < b$, f croissante sur I , alors $f(a) \leq f(b)$

3.4 Raisonnement et logique

Quelques notions de logiques ont déjà été vues tout au long du collège et du lycée : comment faire un raisonnement mathématique sans logique ?! Mais avant d'apprendre de nouvelles choses et de faire de l'analyse **rigoureusement**, il est nécessaire d'avoir plus de formalisme dans le langage mathématique, et de bien savoir manipuler les différents connecteurs logiques. L'objet de cette section est une sorte de “mini cours” de logique, qui ne sera pas plus approfondi en cours magistraux mais qu'il est primordial de commencer à assimiler dès maintenant, sans quoi il deviendra très vite trop difficile de résoudre les exercices de TD.

3.4.1 Négation d'une proposition P

- La négation logique transforme une propriété vraie en une propriété fausse ; une propriété fausse en une propriété vraie ; une propriété en une nouvelle propriété

qui est satisfaite exactement lorsque la première n'est pas satisfaite. La proposition « non P » s'écrit $\neg P$.
- Comprendre que si P est vraie, alors non P est fausse, et si P est fausse, alors non P est vraie.
- La négation d'une proposition n'est pas son « contraire » (même si des fois cela peut être le cas).
- Savoir nier une proposition est une compétence à acquérir.

3.4.2 Implication $P \Rightarrow Q$

- L'énoncé $P \Rightarrow Q$ est équivalent à l'énoncé « non P ou Q » ($(\neg P) \vee Q$).
- Il faut connaître les tables de vérité de $P \Rightarrow Q$.
- Comprendre que $P \Rightarrow Q$ est vraie lorsque P est fausse.
- Savoir manipuler la contraposition : $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.
- Savoir nier une implication : $\neg(P \Rightarrow Q)$ équivaut à $P \wedge (\neg Q)$. Notamment, la négation d'une implication n'est pas une implication.
- Notion de condition nécessaire, condition suffisante.

3.4.3 Les quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition dépendant de x.

L'énoncé : $[\forall x \in A,\ P(x)]$ (qui se lit « Pour tout x appartenant à A $P(x)$ ») est vrai si et seulement si tous les objets du domaine (ici l'ensemble A) satisfont la propriété P. Sinon, il est faux.

L'énoncé : $[\exists x \in A,\ P(x)]$, (qui se lit : « Il existe x dans A tel que $P(x)$ ») est vrai si et seulement si l'énoncé $[\forall x \in A\ \neg P(x)]$ est un énoncé faux.

Par conséquent :
- La négation de $[\forall x \in A,\ P(x)]$ est $[\exists x \in A,\ \neg P(x)]$.
- La négation de $[\exists x \in A,\ P(x)]$ est $[\forall x \in A,\ \neg P(x)]$.

4 Exercices

Dans cette section sont regroupés des exercices “type bac” où seules quelques questions intermédiaires ont été enlevées. Au fur et à mesure des chapitres abordés dans l'UE, il sera bénéfique de faire les quelques exercices associés, comme un “échauffement“ avant les exercices de TD.

4.1 Exercices de logiques

Exercice 1. Soit P la proposition ”Paul a son permis de conduire”. Et soit Q la proposition ”Paul a plus de 18 ans”.

1. L'énoncé $(P \Rightarrow Q)$ est-il vrai ?
2. L'énoncé $(P \Rightarrow Q)$ est-il vrai ?

3. L'énoncé $(P \Leftrightarrow Q)$ est-il vrai ?

Exercice 2. Ecrire à l'aide de symboles mathématiques les propositions suivantes :

1. " Tout étudiant de Lyon1 se réveille au moins une fois par semaine avant 8H".
2. " Pour tout nombre réel x , il existe au moins un entier naturel n supérieur ou égal à x".

Exercice 3. Remplacer les pointillés par le symbole $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais :

1. $\ldots\, x \in \mathbb{R}\ ,\ (x+1)^2 = x^2 + 2\,x + 1$
2. $\ldots\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 + 3\,x - 3 = 0$
3. $\ldots\, x \in \mathbb{R}\ ,\ 2\,x + 1 = 0$
4. $\ldots\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 \geq 0$

Exercice 4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ? Lorsqu'ils sont faux, les nier.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$
2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$
3. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x^2$
4. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ y > x^2$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{N} - \{0\},\ y > x^2$

Exercice 5. Donnez la négation mathématique des phrases suivantes :

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si le nombre entier n est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle à valeurs réelles.

5. f est positive $(\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0)$.
6. f est paire sur $\mathbb{R}$ $(\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x))$.

Exercice 6. On considère la proposition P suivante :

« Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x. »

1. Écrivez la proposition P avec des symboles (quantificateurs) mathématiques.
2. Écrivez la négation de P avec des quantificateurs, puis énoncez-la en français.

Exercice 7. Soient P, Q et R trois propositions. Donnez la négation des propositions suivantes :

1. $P \wedge (\neg Q \vee R)$;
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.

4.2 Etude de fonctions

Exercice 8. Dresser le tableau de variations et donner l'allure de la courbe des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f(x) = e^{-x^2}$
2. $f(x) = \ln(1/2x)$
3. $f(x) =$
4. $f(x) =$

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+2-\frac{4\,e^x}{e^x+3}$. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\ln(3)$.

4.3 Suites réelles

Exercice 10. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 13 \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}\,v_n + \frac{4}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

Exercice 11. Soit $(J_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par $J_n = \int_1^n e^{-t}\,\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$. Etudier le sens de variation de $(J_n)_n$.

Exercice 12. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \int_0^1 x^n\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Etudier les variations de la suite $(u_n)_n$.
2. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Si oui, vers quoi ? [Remarque : on pourra revoir le tracé de la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ de l'exercice 1.]