Math I Analyse :

transition du secondaire au supérieur*

6 septembre 2010

1 Objectifs de l'UE

Il s'agit d'acquérir les bases de l'*analyse* mathématique autour des quatre grands thèmes suivants

- nombres réels,
- suites réelles,
- fonctions d'une variable réelle,
- équations différentielles,

thèmes déjà abordés au lycée mais revus sous un jour nouveau et (nettement) approfondis ici. Parmi les compétences attendues, on peut distinguer deux catégories : celles de nature théorique, avec des notions et des raisonnements à maîtriser pour construire des *démonstrations*, et celles de nature pratique, avec des techniques applicables de manière assez systématique à des objets mathématiques pouvant paraître plus concrets et/ou plus proches des applications aux autres sciences.

Compétences théoriques

- Comprendre les propriétés fondamentales de l'ensemble des réels, du point de vue algébrique (l'*algèbre* s'intéressant aux *structures*, vous apprendrez que $\mathbb{R}$ est ce qu'on appelle un *corps totalement ordonné*) et surtout analytique (avec l'axiome fondamental de l'analyse aussi appelé *principe de la borne supérieure*).
- Savoir faire des démonstrations avec des epsilon (ε, lettre grecque traditionnellement utilisée pour noter une quantité supposément « petite ») : les raisonnements avec des ε (en principe proscrits au lycée) interviennent dans la convergence des suites, dans les notions de limite, continuité, dérivabilité d'une fonction, dans le critère de Cauchy pour les suites et les fonctions ; ils sont indispensables pour faire de l'analyse de manière rigoureuse.
- Consolider la notion de fonction (en particulier, maîtriser ce que signifient les termes : *injection, surjection, bijection*).

*D'après un document issu du groupe transition lycée-université, IREM de Lyon, 2009.

- Assimiler des notions nouvelles : *relation d'ordre* (vue aussi en algèbre), *suite extraite* (centrale dans le théorème - fondamental - de Bolzano–Weierstrass), *continuité* (formalisée par rapport au point de vue graphique du lycée).
- Apprivoiser les équations différentielles comme modèles mathématiques (incontournables dans certains domaines de la physique, la chimie, la biologie, etc.) et faire le lien avec les suites (modèles dits *discrets*).

Compétences pratiques

- Manipulation d'inégalités dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire majorer et minorer, avec des valeurs absolues, des parties entières, des puissances entières, des racines n-ièmes.
- Calculs de limites (élémentaires) de suites et de fonctions.
- Exploitation de tableaux de variations pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Calcul des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 à coefficients constants.

C'est surtout pour les compétences théoriques que la difficulté de la transition entre l'enseignement secondaire (collège-lycée) et l'enseignement supérieur (université ou classes préparatoires aux grandes écoles) se fait sentir.

2 Prérequis de terminale pour bien aborder l'UE

2.1 Connaissance des fonctions

2.1.1 Limites

- Fonctions usuelles (exp, ln, fonctions trigonométriques, fonctions puissances entières, fonctions racines n-ièmes, polynômes du second degré, ...).
- « Théorème des gendarmes » pour les fonctions.
- Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières, et logarithme. A l'infini, l'exponentielle « l'emporte » sur toute puissance de x et les puissances de x « l'emportent » sur le logarithme.

2.1.2 Continuité et variations

- Approche graphique de la continuité d'une fonction en liaison avec le théorème des valeurs intermédiaires[1]. (On parle aussi parfois de « théorème des douaniers ».)
- Existence de solutions pour une équation du type $f(x) = k$ (où x est l'inconnue et k est donné).
- Zéros d'une fonction.
- Sens de variation d'une fonction (monotonie, croissance, décroissance).
- Définition d'un maximum, d'un minimum, interprétation sur un dessin.

[1]Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

2.1.3 Dérivation

- Dérivées des fonctions usuelles (exp, ln, fonctions trigonométriques, fonctions puissances entières, fonctions racines n-ièmes, polynômes du second degré, ...).
- Toute fonction dérivable est continue (la réciproque est fausse).
- Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.
- Définition du maximum ou du minimum d'une fonction dérivable.

2.1.4 Primitives et calcul intégral

- Intégrale et valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque. Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, interprétation de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ comme l'aire sous la courbe de f (et au dessus de l'axe des x).
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles.
- Inégalité de la moyenne.
- Définition d'une primitive d'une fonction continue : si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.
- Primitives des fonctions usuelles (exp, ln, fonctions trigonométriques, fonctions puissances entières, fonctions racines n-ièmes, polynômes du second degré, ...).
- Intégration par parties.

2.2 Compétences techniques sur les fonctions

- Tracer *à main levée* l'allure de la courbe d'une fonction.
- Calculer la limite d'une fonction en un point, calculer la limite de la somme, du produit, du quotient, de la composée de deux fonctions.
- Calculer la dérivée de la somme, du produit, du quotient, de la composée de deux fonctions.
- Comparer deux fonctions : manipulation du signe $\leq$.
- Calculs d'aires de domaines délimités par la courbe représentative d'une fonction sur un intervalle.
- Reconnaître des primitives de fonctions composées, calculer des primitives par intégration par partie.

2.3 Connaissance des suites et récurrence

2.3.1 Définition d'une suite et propriétés

- Définitions explicite, implicite, par récurrence.
- Suites usuelles (arithmétiques, géométriques, ...).
- Limite de suites.
- Théorème « des gendarmes ».
- Définition d'une suite monotone, majorée, minorée, bornée.

– Théorème de convergence des suites croissantes majorées (resp. décroissantes minorées).
– Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes[2].

2.3.2 Raisonnement par récurrence

– « Définition » d'un raisonnement par récurrence : initialisation et « hérédité ».
Le raisonnement par récurrence est un outil puissant qui permet de faire des démonstrations rigoureuses en mathématiques. Il sera donc rappelé à l'université, autant dans les modules d'algèbre que ceux d'analyse (voire aussi ceux d'informatique), et utilisé très souvent.

2.4 Compétences techniques sur les suites

– Calculer les premiers termes d'une suite, *représenter graphiquement* les termes d'une suite.
– Calculer la limite d'une suite, la limite de la somme, du produit, du quotient de suites.
– Faire un raisonnement par récurrence simple lorsqu'il est demandé dans un exercice.

2.5 Une idée des équations différentielles

– Calcul des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants ($ay'+by+c=0$), et éventuellement des équations différentielles linéaire du second ordre de la forme $y''+\omega^2 y=0$ (équation de l'oscillateur harmonique introduite en cours de physique).

La théorie des équations différentielles est immense et nécessite, pour être développée avec soin, plus d'un an d'université[3]. C'est pourquoi les équations différentielles sont abordées dans le secondaire comme dans cette UE sous un aspect essentiellement technique et calculatoire.

[2] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes, c'est-à-dire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et $a_n \leq b_n$ pour tout entier naturel n. Alors ces deux suites sont convergentes, ont la même limite ℓ, et $a_n \leq \ell \leq b_n$ pour tout entier naturel n. Ce théorème est une conséquence du *principe de la borne supérieure*, que l'on verra dans l'UE et selon lequel tout ensemble de réels non vide et majoré possède une borne supérieure. Le théorème des suites adjacentes est donc essentiellement lié aux propriétés intrinsèques de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, qu'il est primordial de formaliser rigoureusement avant d'approfondir l'analyse réelle. On peut en fait même démontrer que ce théorème est équivalent au principe de la borne supérieure : ceci pourra être utile dans certains problèmes d'analyse.

[3] Le premier théorème majeur de la théorie, le théorème de Cauchy–Lipschitz (résultat d'existence et d'unicité des solutions) peut être énoncé mais il ne sera démontré qu'en troisième année de licence.

3 Entrée à l'université : vers l'autonomie

Si un exercice de terminale est détaillé, et guide l'élève pas à pas dans ses calculs pour obtenir le bon résultat, il en est autrement à l'université. Outre les nouvelles notions (assez nombreuses) qu'il faudra assimiler, il faudra également commencer à prendre des initiatives dans la résolution d'un exercice ou d'un problème. Par exemple, si l'on veut étudier les variations d'une fonction, on ne demandera plus de calculer sa dérivée, de factoriser cette dérivée pour en déterminer le signe, puis d'en déduire le sens de variation de la fonction. Un autre exemple : si l'on veut montrer un résultat vérifié par tous les termes d'une suite, il faudra que l'étudiant prenne l'initiative d'essayer de le montrer par récurrence par exemple, ou il devra chercher une autre manière de le démontrer. Voici une liste (évidemment non exhaustive) de compétences que l'on demandera d'acquérir au sein de l'UE Math I Analyse.

3.1 Savoir dresser le tableau de variation d'une fonction

Que fait-il apparaître ?

- L'ensemble de définition de la fonction (avec des double-barres verticales aux points où elle n'est pas définie).
- Le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction (qui se déduit du signe de sa dérivée).
- Les limites aux bornes et autres points remarquables.
- Si possible le maximum et le minimum de la fonction.
- Si possible les zéros de la fonction, ce qui permet de déterminer son signe sur les bons intervalles.

A quoi peut-il servir ?

- Déterminer le maximum et le minimum d'une fonction.
- Majorer et minorer la fonction sur un ou plusieurs intervalles.
- Visualiser les zéros de la fonction.
- Déterminer le signe de la fonction, intervalle par intervalle.
- Tracer rapidement l'allure de la courbe de la fonction : mise en valeur des limites, des asymptotes, des tangentes horizontales (extremum), des zéros de la fonction.

3.2 Tracer l'allure de la courbe représentative d'une fonction

- Établir le tableau de variation.
- Placer les points remarquablesqui aident à tracer (les zéros notamment).
- Déterminer au moins les asymptotes (verticales, horizontales).
- Essayer d' évaluer la « vitesse » de convergence au voisinage de l'infini : croissance linéaire (asymptote diagonale), exponentielle, logarithmique ?

3.3 Savoir manipuler des inégalités dans $\mathbb{R}$

Passer d'une inégalité à une autre inégalité équivalente :

- Rajouter ou soustraire un même terme aux deux membres de l'inégalité.
- Changer un terme de côté en changeant son signe.
- Multiplier (ou diviser) par un réel non nul les deux membres de l'inégalité.

Trouver le signe d'une expression :

- Polynômes et autres fonctions usuelles.
- Identités remarquables.
- Étude de fonction, sens de variation (si a, b appartiennent à Iet $a < b$, f croissante sur I , alors $f(a) \leq f(b)$).
- Majorations et minorations par des expressions dont on connaît le signe.

Trouver un majorant ou un minorant d'une expression :

- Se ramener à une question de signe.

3.4 Raisonnement et logique

Quelques notions de logique ont déjà été vues tout au long du collège et du lycée : comment faire un raisonnement mathématique sans logique ?! Mais avant d'apprendre de nouvelles choses et de faire de l'analyse *rigoureusement*, il est nécessaire d'avoir plus de formalisme dans le langage mathématique, et de bien savoir manipuler les différents connecteurs logiques. L'objet de ce paragraphe est une sorte de mini-cours' de logique, qui ne sera pas plus approfondi en cours magistraux mais qu'il est primordial de commencer à assimiler dès maintenant, sans quoi il deviendra très vite trop difficile de résoudre les exercices de TD.

3.4.1 Négation d'une proposition

- La négation logique transforme une propriété vraie en une propriété fausse, et une propriété fausse en une propriété vraie. Autrement dit, la négation logique transforme une propriété en une seconde propriété qui est satisfaite précisément lorsque la première ne l'est pas.
- La négation d'une proposition P est appelée proposition « non P » et s'écrit $\neg P$.
- La négation d'une proposition n'est pas son « contraire » (même si parfois cela peut être le cas).
- Il faut bien comprendre que si P est vraie, alors non P est fausse, et si P est fausse, alors non P est vraie.
- Savoir nier une proposition est une compétence fondamentale à acquérir.

3.4.2 Implication

- L'énoncé « P implique Q », qui s'écrit $P \Rightarrow Q$, est équivalent à l'énoncé « non Q implique non P », qui s'écrit $\neg Q \Rightarrow \neg P$. C'est la *contraposée* de $P \Rightarrow Q$.

- L'énoncé « P implique Q » est encore équivalent à l'énoncé « non P ou Q », qui s'écrit $(\neg P) \vee Q$. Il faut donc bien comprendre que la proposition « P implique Q » est vraie lorsque la propriété P est elle-même fausse !
- Il faut connaître les *tables de vérité* de $P \Rightarrow Q$.
- Il faut savoir manipuler la contraposition, qui change $P \Rightarrow Q$ en $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.
- Il faut avoir nier une implication. Attention, *la négation d'une implication n'est pas une implication* : non $(P \Rightarrow Q)$ équivaut à « P et non Q », qui s'écrit $P \wedge (\neg Q)$.
- Il faut savoir distinguer les conditions *nécessaires* des conditions *suffisantes*.

3.4.3 Les quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition dépendant de x.

L'énoncé : $[\forall x \in A,\ P(x)]$ (qui se lit « pour tout x appartenant à A, $P(x)$ ») est vrai si et seulement si tous les objets x de l'ensemble A satisfont la propriété P. Sinon, il est faux.

L'énoncé : $[\exists x \in A,\ P(x)]$, (qui se lit : « il existe x dans A tel que $P(x)$ ») est vrai si et seulement si l'énoncé $[\forall x \in A\ \neg P(x)]$ est faux.

Par conséquent :
- la négation de $[\forall x \in A,\ P(x)]$ est $[\exists x \in A,\ \neg P(x)]$,
- la négation de $[\exists x \in A,\ P(x)]$ est $[\forall x \in A,\ \neg P(x)]$.

Ces observations sont cruciales pour construire des *démonstrations par l'absurde*, par exemple concernant les limites (raisonnements avec des epsilon).

4 Exercices

Dans cette section sont regroupés des exercices de type bac, où seules quelques questions intermédiaires ont été enlevées. Au fur et à mesure des chapitres abordés dans l'UE, il sera bénéfique de faire les quelques exercices associés, à titre d' « échauffement » avant les exercices de TD.

4.1 Exercices de logique

Exercice 1. Soit P la proposition « Paul a son permis de conduire ». Et soit Q la proposition « Paul a plus de 18 ans ».

1. L'énoncé $(P \Rightarrow Q)$ est-il vrai ?
2. L'énoncé $(Q \Rightarrow P)$ est-il vrai ?
3. L'énoncé $(P \Leftrightarrow Q)$ est-il vrai ?

Exercice 2. Écrire à l'aide de symboles mathématiques les propositions suivantes :

1. « Tout étudiant de Lyon 1 se réveille au moins une fois par semaine avant 8h ».
2. « Pour tout nombre réel x , il existe au moins un entier naturel n supérieur ou égal à x ».

Exercice 3. Remplacer les pointillés par le symbole $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais :

1. $\ldots\ x \in \mathbb{R}\ ,\ (x+1)^2 = x^2 + 2\,x + 1.$
2. $\ldots\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 + 3\,x - 3 = 0.$
3. $\ldots\ x \in \mathbb{R}\ ,\ 2\,x + 1 = 0.$
4. $\ldots\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 \geq 0.$

Exercice 4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ? Lorsqu'ils sont faux, les nier.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7.$
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7.$
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2.$
4. $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2.$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, y > x^2.$

Exercice 5. Donner la négation mathématique des phrases suivantes :

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si le nombre entier n est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle à valeurs réelles.

5. f est positive $(\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0)$.

6. f est paire ($\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)$).

Exercice 6. On considère la proposition P suivante :
« Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x. »

1. Écrire la proposition P avec des symboles (quantificateurs) mathématiques.
2. Écrire la négation de P avec des quantificateurs, puis l'énoncer en français.

Exercice 7. Soient P, Q et R trois propositions. Donner la négation des propositions suivantes :

1. $P \wedge (\neg Q \vee R)$.
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.

4.2 Étude de fonctions

Exercice 8. Dresser le tableau de variations et donner l'allure de la courbe des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f(x) = e^{-x^2}$
2. $f(x) = \ln(1/2x)$
3. $f(x) = x + 2 - \dfrac{4\,e^x}{e^x + 3}$
4. $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$
5. $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$
6. $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$
7. $f(x) = (1 + x)e^{-x^2}$
8. $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)$
9. $f(x) = \dfrac{xe^{-x^2}}{x^2 + 1}$
10. $f(x) = -(x^2 + 2x)e^{-x}$
11. $f(x) = \cos(x)^2$
12. $f(x) = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$
13. $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+2-\frac{4\,e^x}{e^x+3}$. Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\ln(3)$.

4.3 Suites réelles

Exercice 10. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 13\,, \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}\,v_n + \frac{4}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

Exercice 11. Soit $(J_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$. Étudier le sens de variation de $(J_n)_n$.

Exercice 12. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \int_0^1 x^n\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Étudier les variations de la suite $(u_n)_n$.
2. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Si oui, vers quoi ? [Remarque : on pourra revoir le tracé de la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ de l'exercice 8.]