

ÉLÉMENTS DE MODÉLISATION DÉTERMINISTE (M1)

SYLVIE BENZONI

L'objectif est de se familiariser avec quelques modèles classiques, aux domaines d'application variés, et de voir quelques méthodes simples permettant leur simulation sur ordinateur. Cette partie concerne exclusivement des modèles déterministes, de type équations différentielles (ordinaires puis aux dérivées partielles).

Programme prévisionnel (dans le désordre):

1) Équations différentielles ordinaires. Équations d'Euler-Lagrange en mécanique, exemple du pendule simple. Équation de van der Pol en électricité. Équation logistique, équations de Lotka-Volterra en dynamique des populations. Comparaison avec les modèles discrets. Schéma d'Euler. Portraits de phase.

2) Équations aux dérivées partielles. - Équation de Poisson en électrostatique. Équations des fluides parfaits incompressibles et irrotationnels (potentiel, fonction de courant). - Équation de transport. Équation des cordes vibrantes. Équation de continuité en mécanique des fluides, application au trafic routier. - Équation de la chaleur. Équations de réaction-diffusion en biologie. Simulation par différences finies. Conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet.

1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Ceci n'étant pas un cours d'équations différentielles, nous aborderons exclusivement des *exemples* d'équations différentielles. Par ailleurs, les pré-requis en provenance d'autres disciplines seront limités à leur strict minimum. Ce chapitre est divisé en trois parties, concernant trois domaines d'application distincts (bien que l'on puisse leur trouver des points communs):

- la *dynamique des populations*, qui sera l'occasion d'étudier les propriétés qualitatives d'équations scalaires (modèles de Malthus et de Verhulst) et de systèmes de deux équations (modèles prédateurs-proies de type Lotka-Volterra); on en profitera également pour introduire le schéma d'Euler;
- la *mécanique du point* avec l'équation de l'oscillateur harmonique et celle du pendule simple, dont on étudiera en détail le portrait de phase, puis la *mécanique du solide* avec le mouvement d'une toupie,
- l'*électricité* avec les circuits RLC modélisés par l'équation de van der Pol, admettant une solution périodique « non-triviale ».

Pour la dynamique des populations, strictement aucun pré-requis n'est nécessaire. Pour la mécanique du point il suffira de connaître la loi de Newton. Nous verrons en outre quelques éléments concernant le formalisme lagrangien permettant la mise en équation de problèmes de mécanique du solide, sur l'exemple de la toupie. Pour l'électricité, nous serons amenés à admettre les lois classiques (Faraday) reliant différences de potentiel et intensités.

1.1. Dynamique des populations. Une référence particulièrement recommandée pour ce paragraphe est le livre de Murray [7] (au moins le premier chapitre).

Un modèle mathématique en dynamique des populations, qu'il concerne des humains, du gibier, des bactéries ou des végétaux, vise à prédire l'évolution future du nombre d'individus. Il est

généralement construit sur la base de la situation au moment présent, voire de l'évolution passée, et d'arguments plus ou moins empiriques.

1.1.1. *Malthus*. Le modèle le plus simple qui soit est dû à Malthus et s'exprime sous forme d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Considérons une population dont le nombre d'individus est $N(t)$ à l'instant t . En pratique, il est impossible de compter le nombre d'individus à chaque instant t , il faut donc imaginer qu'on les compte avec une périodicité donnée: un jour, un mois, un an, ..., cela dépend de l'échelle de temps qui nous intéresse. Disons pour fixer les idées que l'intervalle de temps entre chaque décompte (recensement exhaustif) est Δt . Pendant cet intervalle de temps, des individus naissent, meurent, arrivent ou partent (selon les flux migratoires ou les prédateurs dans la nature, ou encore l'intervention du biologiste en laboratoire). Faisons pour l'instant abstraction des arrivées et des départs. On appelle *taux d'accroissement naturel* de la population entre t et $t + \Delta t$ la variation du nombre d'individus due aux naissances et aux décès, divisée par Δt et par le nombre total d'individus à l'instant « initial » t : la dimension physique du taux d'accroissement naturel r est donc l'inverse d'un temps. Par définition,

$$(1) \quad r = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t) \Delta t}.$$

Notons que ce taux d'« accroissement » peut parfaitement être négatif. C'est en fait la différence entre le *taux de natalité* et le *taux de mortalité*. Des valeurs typiques de r sont par exemple $13\% - 9\% = 4\%$ par an en France, et $10\% - 16\% = -6\%$ par an en Ukraine (source: INED/Banque Mondiale). En général, r dépend évidemment de t et de Δt . Cependant, l'hypothèse de base dans le modèle de Malthus consiste à dire que r est constant. Dans ce cas, et si on connaît la valeur de r , on peut voir la relation (1) comme un moyen de calculer $N(t_k)$ à tout instant $t_k = t_0 + k\Delta t$ connaissant $N(t_0)$. En effet, (1) équivaut à

$$(2) \quad N(t + \Delta t) = (1 + r\Delta t)N(t),$$

ce qui veut simplement dire que la suite des valeurs $(N(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est *géométrique* de raison $1 + r\Delta t$. Ceci n'est toutefois qu'une version *discrète* du modèle de Malthus, qui s'obtient en faisant tendre Δt vers 0 dans (1). En supposant que ce passage à la limite est justifié, on obtient ainsi l'*équation différentielle ordinaire, linéaire du premier ordre*:

$$(3) \quad \frac{dN}{dt} = rN.$$

Pour que cette équation soit correcte, il faut prendre garde à bien exprimer le temps t et l'inverse de r dans la même unité: seconde, heure, année, siècle, peu importe *a priori*, pourvu qu'il soit raisonnable de supposer r constant sur l'échelle de temps considérée. On connaît parfaitement les solutions de (3): elles sont de nature *exponentielle*, et plus précisément, toute solution de (3) est donnée par

$$N(t) = N(0)e^{rt}.$$

Autrement dit, une population régie par l'équation de Malthus (3) s'accroît exponentiellement vite si $r > 0$, et s'éteint exponentiellement vite si $r < 0$. Si l'on observe les données de la population humaine mondiale, celle-ci semble plutôt relever, qualitativement au moins, du premier cas!

Sensibilité par rapport aux données initiales. Il est crucial de remarquer que l'équation (3), aussi simple soit-elle, est extrêmement sensible aux données initiales si $r > 0$. En effet, la forme exponentielle des solutions montre qu'une erreur (de mesure ou d'arrondi) à l'instant initial est multipliée par e^{rT} au bout d'un temps T . Étant données les valeurs prises par la fonction exponentielle (pour mémoire, $e \approx 2,7$, $e^{10} \approx 22000$), s'il est raisonnable d'utiliser (3) comme modèle mathématique sur des temps de l'ordre de $1/r$, cela n'a aucun sens (quantitativement) pour des temps de l'ordre de $10/r$. Avec par exemple $r = 4\%$ par an, si l'on veut que l'erreur soit au pire multipliée par

10, cela limite la portée du modèle à $\ln(10) \times 1000/4 \approx 575$ ans. Notez que le problème est analogue avec le modèle discret (2): une erreur sur la valeur initiale de la suite géométrique de raison $1 + r\Delta t$ est multipliée par $(1 + r\Delta t)^k$ à l'instant $t_k = t_0 + k\Delta t$. Avec la valeur précédente $r = 4\%$ par an et $\Delta t = 1$ an, pour que l'erreur soit au pire multipliée par 10, il ne faut pas aller au delà de $\ln(10)/\ln(1 + 4/1000) \approx 577$ ans.

Comparaison entre modélisation discrète et continue. Le modèle (2) s'obtient en *discrétisant* (3) par le *schéma d'Euler explicite*. Un *pas de discrétisation* $\Delta t = 1$ an peut paraître grossier mais cela dépend de la valeur de r et de l'intervalle de temps auquel on s'intéresse. En effet, pour des données initiales identiques, l'erreur relative à l'instant $t_k = t_0 + k\Delta t$ entre la solution du modèle continu (3) et la solution du modèle discret (2) est

$$\varepsilon_k := 1 - (1 + r\Delta t)^k e^{-rk\Delta t}.$$

De façon générale, si l'on fixe un temps T que l'on subdivise en K intervalles de longueur Δt , l'erreur ε_K tend vers zéro lorsque K tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire Δt tend vers zéro): ceci résulte précisément de la *formule d'Euler*:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} (1 + x/K)^K = e^x.$$

Bien sûr, à Δt fixé, ε_k croît avec k . Par exemple en prenant à nouveau $r = 4\%$ par an avec $\Delta t = 1$, on trouve

$$\varepsilon_1 \approx 8.10^{-6}, \quad \varepsilon_{10} \approx 8.10^{-4}, \quad \varepsilon_{100} \approx 6.10^{-2}, \quad \varepsilon_{1000} \approx 0,9.$$

Autrement dit, la cohérence entre le modèle discret et le modèle continu dure plus longtemps que leur robustesse par rapport aux données initiales...

Introduction de « termes sources ». Nous avons parlé au début de possibles migrations ou interventions de l'expérimentateur. Si l'on tient compte du flux net d'individus (les entrants moins les sortants) par unité de temps, disons f , l'équation (3) devient

$$(4) \quad \frac{dN}{dt} = rN + f.$$

On dit que f est un *terme source*. De façon générale, si l'on autorise à la fois r et f à dépendre du temps t , la solution de (4) est donnée par la *formule de Duhamel*

$$(5) \quad N(t) = e^{\int_{t_0}^t r(s)ds} N(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t r(s)ds} f(\tau) d\tau.$$

En particulier lorsque r et f sont constants, cette formule se réduit à

$$N(t) = N(t_0) e^{r(t-t_0)} + (e^{r(t-t_0)} - 1) f/r,$$

où l'on voit que $N(t)$ s'annule en temps fini si $f < -rN(t_0)$. Ce n'est évidemment pas surprenant: si l'on soustrait suffisamment d'individus, la population finit par s'éteindre.

1.1.2. *Verhulst.* Au 19ème siècle, Verhulst proposa une version modifiée du modèle de Malthus, avec un terme « auto-limitant », c'est-à-dire limitant la croissance lorsque la population devient trop grande. Ceci revient en fait à ajouter un terme source f dépendant de N . L'hypothèse de Verhulst est que ce terme dépend de façon quadratique de N , de sorte que la nouvelle équation s'écrive

$$(6) \quad \frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K),$$

où K représente la *capacité de l'environnement* à assurer la survie de l'espèce: tant que N n'a pas atteint la valeur K , la population s'accroît; si elle dépasse K à un certain moment, elle décroît. En fait, une analyse du *portrait de phase* de cette équation montre qu'une population initiale en

dessous de la capacité K ne peut jamais la dépasser si elle régie par (6), aussi appelée *équation logistique*. Ceci est confirmé par la *résolution explicite* de cette équation. On trouve en effet

$$N(t) = K \frac{e^{rt} N(t_0)}{K - N(t_0) + e^{rt} N(t_0)}.$$

Vers les modèles prédateurs-proie. Une version raffinée de l'équation logistique est l'équation de *Ludwig*:

$$(7) \quad \frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}.$$

Elle prend en compte non seulement une auto-régulation quadratique mais aussi un terme source s'annulant avec N et asymptotiquement constant lorsque la population est très grande. Il correspond par exemple au prélèvement d'individus par des prédateurs, qui est faible lorsque la population de proies est petite (les prédateurs vont chercher leur nourriture ailleurs), et limité par la quantité de nourriture que les prédateurs sont capables d'absorber.

Adimensionnalisation. Afin d'étudier efficacement un modèle, il est bon de s'affranchir du choix des unités de mesure, de sorte que les notions de quantités « petites » ou « grandes » prennent un sens absolu. Pour cela, on procède à ce que l'on appelle une *adimensionnalisation*. Ceci consiste à choisir des valeurs de référence (dans une unité de mesure quelconque) pour toutes les dimensions physiques apparaissant dans le modèle, puis à définir de nouvelles inconnues et paramètres sans dimension à partir de ces valeurs de référence. Cette approche a pour effet « secondaire » de réduire le nombre de paramètres au strict minimum, d'après le *théorème π de Buckingham* (reposant sur des arguments d'algèbre linéaire, le théorème du rang notamment, voir [6, p. 5]). Sur l'exemple de l'équation (7), les dimensions « physiques » sont seulement au nombre de deux: le temps et le nombre d'individus (même si ce nombre n'a pas vraiment une dimension physique, on peut l'exprimer en milliers, millions ou milliards par exemple). Choisissons donc un temps de référence T et un nombre d'individus de référence M . Les paramètres K et A représentent des nombres d'individus. On leur associe donc naturellement les paramètres sans dimension $\tilde{K} := K/M$ et $\tilde{A} := A/M$. Le taux d'accroissement naturel r a la dimension de l'inverse du temps, on définit donc $\tilde{r} := Tr$. Quant au paramètre B , il est homogène à dN/dt , ce qui nous conduit à poser $\tilde{B} := TB/M$. Enfin, l'inconnue N est un nombre d'individus. On considère donc l'inconnue sans dimension $\tilde{N} := N/M$, vue comme une fonction du temps adimensionné $\tilde{t} := t/T$. On a ainsi

$$\frac{d\tilde{N}}{d\tilde{t}} = \frac{T}{M} \frac{dN}{dt}.$$

En substituant toutes ces nouvelles quantités dans (7), on obtient exactement la même équation, avec des tildes:

$$\frac{d\tilde{N}}{d\tilde{t}} = \tilde{r}\tilde{N}(1 - \tilde{N}/\tilde{K}) - \frac{\tilde{B}\tilde{N}^2}{\tilde{A}^2 + \tilde{N}^2}.$$

À première vue, il semble qu'on n'ait rien gagné en terme de nombre de paramètres! Cependant, on peut en supprimer deux en choisissant « astucieusement » $M = A$ et $T = A/B$, ce qui nous ramène à $\tilde{A} = 1$ et $\tilde{B} = 1$. Ainsi, en posant $q := K/A$ et en « oubliant les tildes pour simplifier » (phrase classique dans cette approche), on obtient l'équation adimensionnalisée à seulement deux paramètres:

$$(8) \quad \frac{dN}{dt} = rN(1 - N/q) - \frac{N^2}{1 + N^2}.$$

1.1.3. *Lotka–Volterra*. Les « vrais » modèles prédateurs-proies s'intéressent au nombre d'individus dans les deux catégories de populations. Disons que $N(t)$ et $P(t)$ représentent respectivement le nombre de proies et le nombre de prédateurs à l'instant t . Le système proposé par Volterra suppose que:

- les proies ont un certain taux d'accroissement naturel indépendant du temps,
- le prélèvement de proies par les prédateurs est proportionnel au produit NP ,
- les prédateurs ont un taux d'« accroissement » naturel indépendant du temps (ce taux étant négatif car en l'absence de proie la population de prédateurs est amenée à dépérir),
- la présence de proies ajoute un terme source proportionnel au produit NP à l'équation sur P .

On obtient un système de deux équations différentielles ordinaires

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = -dP + cNP, \end{cases}$$

doté de plusieurs propriétés remarquables. Avant tout, le lecteur pourra à titre d'exercice¹ adimensionner le système (9) et montrer qu'il suffit d'un (et non quatre) paramètre sans dimension, le système adimensionné s'écrivant

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(1 - P), \\ \frac{dP}{dt} = -\delta P(1 - N). \end{cases}$$

Comme première propriété on voit que les axes du plan, $N = 0$ (absence de proies) et $P = 0$ (absence de prédateurs), sont *invariants par le flot* (aussi bien de (10) que de (9), évidemment): cela signifie que si $N(t_0) = 0$ alors $N(t) = 0$ quel que soit t (et de même pour P); du point de vue de la modélisation, c'est la moindre des choses (il ne peut y avoir de « génération spontanée » de proies ou de prédateurs); du point de vue mathématique, c'est une conséquence de la partie unicité dans le théorème de *Cauchy–Lipschitz*, qui s'applique sans problème ici car les seconds membres de (9) sont des fonctions polynomiales de (N, P) . On montre même plus par cet argument d'unicité: les demi-droites $\{(N, 0); N > 0\}$ et $\{(0, P); P > 0\}$ sont des *trajectoires*, c'est-à-dire des courbes décrites par des solutions de (9), et par suite, les trajectoires ne pouvant s'intersecter sans coïncider, le quart de plan $\{(N, P); N > 0, P > 0\}$ est aussi invariant par le flot. Une autre propriété mathématique de (9) et de sa version adimensionnée (10), est leur *conservativité*, autrement dit l'existence d'une *intégrale première*, qui est par définition une quantité constante le long des trajectoires. Cette intégrale première se calcule aisément car elle est à *variables séparées*, c'est-à-dire somme d'une fonction de N et d'une fonction de P . En effet, supposons que (N, P) soit une solution non triviale de (10), c'est-à-dire pour laquelle ni N ni P ne s'annule, et telle que ni N ni P ne prennent la valeur 1. Alors

$$\frac{1}{N(1-P)} \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\delta P(1-N)} \frac{dP}{dt} = 0,$$

d'où après multiplication par $\delta(1-P)(1-N)$,

$$\frac{d}{dt}(\delta(\ln N - N) + \ln P - P) = 0.$$

Ceci montre précisément que la fonction $H: (N, P) \mapsto \delta(\ln N - N) + \ln P - P$ est une intégrale première de (10) (notez que les restrictions $N \neq 1$, $P \neq 1$, sont inutiles: elles sont apparues artificiellement dans la manière de faire de la calcul). Cependant, aussi intéressante soit-elle mathématiquement, la conservativité du système de Lotka–Volterra révèle ses limites du point de vue de la modélisation:

¹Indication: poser $T = 1/a$, $\tilde{N} = Nc/d$, $\tilde{P} = Pb/a$.

les courbes de niveau de H forment en effet des courbes fermées dans le *plan de phase* $\{(N, P); N \geq 0, P \geq 0\}$, correspondant à des *solutions périodiques* assez peu réalistes. Pour plus de détails et des modèles plus réalistes, on renvoie au chapitre 3 de [7].

Remarque 1. *Le lecteur plus intéressé par la finance que par la dynamique des populations pourra transposer ce qui précède en changeant nombre d'individus en masse d'argent, taux d'accroissement naturel en taux d'intérêt, soldes migratoires en soldes budgétaires (différence entre recettes et dépense), etc.*

1.2. Mécanique. La modélisation en mécanique relève de lois assez bien établies. Celle que nous utiliserons principalement en mécanique du point est la *loi de Newton*. Si un point matériel de masse m est repéré dans l'espace \mathbb{R}^d par sa *position* $x(t) \in \mathbb{R}^d$ à l'instant t , sa *vitesse* est $v(t) = x'(t) \in \mathbb{R}^d$, son *accélération* est $a(t) = x''(t) \in \mathbb{R}^d$, et s'il est soumis à une *force* $F \in \mathbb{R}^d$, la loi de Newton s'exprime par la célèbre relation $F = ma$, qui revient à une *équation différentielle du second ordre*

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F.$$

Lorsque la force F est constante, cette équation différentielle est triviale: elle s'intègre à vue pour donner des solutions polynomiales d'ordre 2 en t . Ceci explique notamment les *trajectoires paraboliques* des (petits) objets lancés en l'air, essentiellement soumis à la seule force de gravité $F = m\vec{g}$, où \vec{g} est l'*accélération de la pesanteur*: à la surface de la Terre, \vec{g} est un vecteur dirigé verticalement vers le bas (ces notions de « verticalité » et de « bas » dépendant évidemment du point où l'on se situe, mais à une échelle spatiale très inférieure au rayon de la Terre, les variations de \vec{g} sont négligeables), et de norme $g \approx 9.8 m.s^{-2}$. Lorsque la force F dépend de la position x (ce qui est en principe le cas avec la force de gravité, comme on vient de le rappeler), la loi de Newton devient une « vraie » équation différentielle du second ordre, en général non-linéaire:

$$(11) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F(x)}{m}.$$

1.2.1. Oscillateur harmonique. L'exemple le plus simple est celui d'un point matériel situé à l'extrémité d'un ressort dont l'autre extrémité est fixée. Dans ce cas, (si le ressort est suffisamment



FIG. 1. Ressort, modèle d'oscillateur harmonique.

rigide, ou contraint, pour avoir des mouvements rectilignes) $d = 1$. Si à chaque instant t , $x(t)$ est l'*abscisse* de l'extrémité mobile dans un repère d'origine la position au repos (ressort ni étiré ni comprimé), une expression couramment admise pour la force est alors

$$F(x) = -kx,$$

où le paramètre $k > 0$ est la *raideur* du ressort (plus k est élevé plus la force de rappel est intense). Pour une telle fonction F (linéaire), l'équation (11) devient, en posant pour simplifier $\kappa := k/m$,

$$(12) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \kappa x = 0,$$

appelée équation de l'*oscillateur harmonique*. On connaît ses solutions explicitement. Plus précisément, le *problème de Cauchy* pour (12) et une donnée initiale $(x(0), x'(0)) = (x_0, v_0)$ admet comme solution unique la fonction

$$x: t \mapsto x_0 \cos(\sqrt{\kappa}t) + (v_0/\sqrt{\kappa}) \sin(\sqrt{\kappa}t).$$

La forme sinusoidale de cette solution explique évidemment le terme d'oscillateur.

1.2.2. *Pendule simple.* Voyons maintenant un exemple où la force F dépend non-linéairement de x . C'est encore un cas d'*équation scalaire* ($d = 1$) mais dans lequel $x(t)$ représente un *angle*, en l'occurrence l'angle par rapport à la position verticale d'une tige fixée à son extrémité haute et contrainte à se déplacer dans un plan. En fait, on suppose cette tige de masse négligeable sauf à son extrémité libre M , où l'on met une masse m , dont on va voir que la valeur n'intervient pas dans l'équation! En revanche, la longueur ℓ de la tige intervient. L'équation du mouvement de ce

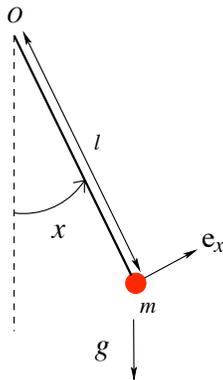


FIG. 2. Pendule simple (oscillant dans un plan).

dispositif, appelé *pendule simple*, s'écrit en effet

$$(13) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin x = 0.$$

Attention, nous avons fait ici un petit glissement de notations par rapport au cadre général: les « vraies » positions, vitesses et accélérations de M sont des vecteurs de \mathbb{R}^2 (et non les scalaires $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$); ceci devrait être clair dans le calcul qui suit.

On peut obtenir (13) par la loi de Newton (moyennant quelques hypothèses implicites, cf [1]), bien que ce ne soit pas le plus facile. En effet, dans le bilan des forces exercées sur l'extrémité libre du pendule, il faut tenir compte du fait que ce point est *lié* à la tige et non libre de se déplacer dans l'espace. Par suite, la loi de Newton se réduit ici à l'égalité entre les *projections* orthogonales à la tige de l'accélération du point et de l'accélération de la pesanteur. Voyons ce que cela donne. Dans un repère orthonormé direct Ozy où O est le point de fixation du pendule, z est la direction verticale dirigée vers le bas, l'extrémité libre M du pendule a pour coordonnées $(\ell \cos x, \ell \sin x)$, de sorte que sa vitesse a pour coordonnées $(-\ell x' \sin x, \ell x' \cos x)$, et son accélération $(-\ell x'' \sin x - \ell x' \cos x, \ell x'' \cos x - \ell x' \sin x)$. Quant à l'accélération de la pesanteur, ses coordonnées sont évidemment $(g, 0)$. En égalant les produits scalaires des accélérations par le vecteur \vec{e}_x de coordonnées $(-\sin x, \cos x)$ on obtient l'équation attendue

$$\ell x'' = -g \sin x.$$

On peut aussi obtenir cette équation de manière plus rapide grâce à la *conservation de l'énergie totale*. En effet, l'*énergie cinétique* instantanée du point M est

$$E_c := \frac{1}{2} m \|\overrightarrow{OM}'\|^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 x'^2,$$

et son *énergie potentielle* (nous reviendrons sur cette notion plus loin) est (à une constante près)

$$E_p := -m g z = -m \ell \cos x.$$

L'équation (13) se déduit donc de

$$(14) \quad \frac{d}{dt}(E_c + E_p) = 0$$

(lorsque la masse m est non nulle!) aux instants où $x' \neq 0$. Notez qu'« inversement », (13) implique (14) avec E_c et E_p définies comme ci-dessus. Autrement dit, l'énergie totale est une *intégrale première* de l'équation du mouvement. Pour être plus précis, il est préférable d'écrire (13) comme un *système* dans le *plan de phase* $\{(x, v = x') \in \mathbb{R}^2\}$:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\ell} \sin x, \end{cases}$$

et d'exprimer l'énergie totale en fonction de (x, v) :

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} m \ell^2 v^2 - m \ell \cos x.$$

Cette fonction de (x, v) est une intégrale première de (15). C'est bien sûr un modèle *idéalisé*: en pratique, le mouvement du pendule finira toujours par s'amortir. Un modèle plus réaliste devrait tenir compte des frottements dans le bilan des forces, c'est-à-dire en fait d'une force F dépendant aussi de la vitesse, ce qui détruirait la conservation de l'énergie (et en général aussi l'indépendance de l'équation par rapport à la masse). Si l'on reste sur le modèle de pendule simple idéal, l'intégrale première $E_c + E_p$ permet de tracer facilement le *portrait de phase* de (15). On y observe notamment:

- des *points d'équilibre*: le point bas $(x, v) = (0, 0)$, stable, et le point haut $(x, v) = (\pi, 0)$, instable,
- des *cycles* correspondant à des oscillations périodiques autour du point d'équilibre bas (restant strictement en dessous du point haut),
- des *orbites* « *hétéroclines* » (en fait *homoclines* si l'on identifie les points $(\pi, 0)$ et $(-\pi, 0)$ du plan de phases), correspondant à un mouvement « atteignant » en temps infini le point d'équilibre haut,
- des trajectoires correspondant à des tours complets effectués de façon périodique autour du point d'équilibre haut.

1.2.3. *Saut à ski*. Intéressons nous à un skieur dévalant une pente en « ligne droite », c'est-à-dire en suivant une courbe (pré-déterminée) située dans un plan vertical (par exemple un tremplin de saut). Supposons grossièrement que l'on peut assimiler ce skieur à un point matériel de masse m . Comme pour le pendule, on va voir que si l'on néglige les frottements la masse m n'intervient pas dans l'équation du mouvement, équation que l'on obtient très facilement en utilisant la conservation de l'énergie totale. En effet, si l'on suppose pour fixer les idées que le skieur part avec une vitesse nulle d'un point O , si l'on exprime les coordonnées de sa position M un repère orthonormé direct Ozy où z est la direction verticale dirigée vers le bas, son énergie totale initiale est nulle (cette valeur étant liée au choix arbitraire de la constante dans l'énergie potentielle) et à chaque instant t elle vaut

$$E_c(t) + E_p(t), \quad \text{avec } E_c(t) := \frac{1}{2} m (y'(t)^2 + z'(t)^2), \quad E_p(t) := -m g z(t).$$

Il faut de plus se souvenir que la trajectoire n'est pas libre mais donnée par une courbe (plane). Disons qu'elle soit d'équation $z = \zeta(y)$ (notez que ce paramétrage par y autorise le tremplin à remonter). La conservation de l'énergie totale fournit alors comme équation du mouvement:

$$(1 + \zeta'(y(t))^2) y'(t)^2 - 2 g \zeta(y(t)) = 0,$$

soit encore, en dérivant et en supposant que y' ne s'annule pas (il est assez rare qu'un sauteur s'immobilise sur le tremplin!),

$$(16) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \left(g - \zeta''(y) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) \frac{\zeta'(y)}{1 + \zeta'(y)^2}.$$

On a là un exemple d'équation différentielle du second ordre bien plus compliqué à première vue que ceux rencontrés jusqu'à présent (notamment parce que la dérivée première de y intervient). Cependant on sait déjà, étant donnée la façon dont on l'a obtenue, que cette équation ou plus exactement le système équivalent dans le plan de phase

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = w, \\ \frac{dw}{dt} = (g - \zeta''(y) w^2) \frac{\zeta'(y)}{1 + \zeta'(y)^2}. \end{cases}$$

admet

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} m (1 + \zeta'(y)^2) w^2 - m g \zeta(y)$$

comme intégrale première. En fait, l'équation (16) est ce qu'on appelle une *équation d'Euler-Lagrange* pour le *lagrangien*

$$L : (y, w) \mapsto L(y, w) := \frac{1}{2} m (1 + \zeta'(y)^2) w^2 + m g \zeta(y)$$

(notez le changement de signe par rapport à l'énergie totale), c'est-à-dire que (16) s'écrit de façon abstraite à l'aide de L :

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial w} \left(y, \frac{dy}{dt} \right) \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \left(y, \frac{dy}{dt} \right).$$

(La vérification est laissée au lecteur.) On a gardé la masse m dans le lagrangien par souci d'homogénéité physique (un lagrangien ayant en général la dimension d'une énergie) mais elle n'intervient pas ici dans l'équation du mouvement. Bien entendu, il s'agit comme pour le pendule simple d'un modèle idéalisé: tout amateur de ski sait bien que plus on est lourd plus on va vite (si les sauteurs sont maigres, c'est pour mieux « voler » après le tremplin; pour aller plus vite sur le tremplin il vaudrait mieux qu'ils soient lourds comme les descendeurs).

Remarque 2. *Un problème célèbre² de calcul des variations est de déterminer la forme optimale du tremplin, c'est-à-dire la fonction ζ minimisant le temps de parcours entre le point de départ \mathbf{O} et le point de décollage, ces deux points étant fixés. Or, sachant d'après ce qui précède que*

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2 g \zeta(y)}{1 + \zeta'(y)^2}},$$

si a est l'abscisse du point de décollage, ce temps de parcours est donné par

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \zeta'(y)^2}{2 g \zeta(y)}} dy.$$

Une condition nécessaire de minimisation de T sous les conditions $\zeta(0) = 0$, $\zeta(a) = h$ (ordonnée du point de décollage) s'exprime aussi au moyen d'une équation d'Euler-Lagrange, en l'occurrence celle associée au lagrangien

$$P : (\zeta, \xi) \mapsto P(\zeta, \xi) := \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{2 g \zeta}},$$

²si ce n'est le premier: il est connu sous le nom de problème de la *brachistochrone*.

qui s'écrit

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \left(\zeta, \frac{d\zeta}{dy} \right) \right) = \frac{\partial P}{\partial \zeta} \left(\zeta, \frac{d\zeta}{dy} \right).$$

On montre que la courbe optimale est une cycloïde. On voit déjà, sans aucun calcul compliqué, que cela ne peut pas être une droite. En effet, notons que

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} (\zeta, \xi) = \frac{\xi}{1 + \xi^2} P(\zeta, \xi),$$

et donc, si l'on avait une solution linéaire $\zeta : y \mapsto \xi_0 y$ de l'équation d'Euler-Lagrange associée à P , on aurait

$$\frac{\xi_0^2}{1 + \xi_0^2} \frac{\partial P}{\partial \zeta} (\xi_0 y, \xi_0) = \frac{\partial P}{\partial \zeta} (\xi_0 y, \xi_0).$$

1.2.4. *Planètes.* Supposons qu'une « petite » planète (ou satellite) de masse m soit dans le *champ de gravité* d'une « grosse » planète (ou astre, comme le soleil) de masse M . Les adjectifs entre guillemets sont surtout là pour justifier qu'on identifie la petite planète à un point. Si $x \in \mathbb{R}^3$ désigne la position de cette petite planète dans un référentiel lié à la grosse planète, la *loi de la gravitation universelle* détermine la force exercée par la grosse planète sur la petite:

$$F(x) = - \frac{GMm}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|}.$$

où G est la constante d'attraction universelle ($G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$). Notez que l'expression $F = m\vec{g}$ utilisée plus haut pour un objet dans l'attraction de la Terre revient à négliger les variations de x par rapport au rayon terrestre R et à poser $g = GM/R^2$ où M est la masse de la Terre (l'application numérique permettant de calculer la valeur de g est laissée au lecteur). Si l'on conserve l'expression exacte de F , la loi de Newton (11) donne comme équation du mouvement

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{GM}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|},$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{m} \nabla V(x), \quad V(x) := - \frac{GMm}{\|x\|}.$$

On dit que la force F *dérive du potentiel* V . C'est ainsi que l'on définit l'*énergie potentielle*: lorsque la force F dérive d'un potentiel V , la loi de Newton s'écrit dans l'*espace des phases* $\{(x, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \nabla V(x), \end{cases}$$

et ce système d'équations différentielles admet l'énergie totale

$$\frac{1}{2} m \|v\|^2 + V(x)$$

comme intégrale première; le premier terme est l'*énergie cinétique* et le second est l'*énergie potentielle*, définie à une constante près. On ne reconnaît pas immédiatement dans V l'expression de l'énergie potentielle utilisée plus haut à propos du pendule, $E_p = mgh$ pour un point matériel de masse m et d'altitude h . En fait, cette dernière résulte de l'approximation suivante:

$$V = - \frac{GMm}{R+h} \approx - \frac{GMm}{R} + m \frac{GM}{R^2} h, \quad h \ll R.$$

1.2.5. *Toupie.* Au paragraphe précédent nous avons assimilé les planètes à des points matériels. Voyons maintenant un « vrai » problème de mécanique du solide, à savoir le mouvement d'une toupie. On va obtenir les équations du mouvement comme équations d'Euler-Lagrange: il « suffit » pour cela de savoir exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction des données *cinématiques* (position et vitesse).

On considère plus précisément un solide de révolution (c'est-à-dire invariant par rotation autour de son axe), homogène (c'est-à-dire de masse uniformément répartie), avec un point fixe appartenant à l'axe de révolution (la pointe de la toupie). Ce solide S a un *centre de gravité* G , défini de façon unique par

$$\iiint_S \overrightarrow{GM} d\lambda(M) = \mathbf{0},$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue divisée par le volume de S (de sorte que $\lambda(S) = 1$). S'il est de masse m , son énergie potentielle due à la gravité est (à une constante près, avec l'approximation mentionnée ci-dessus)

$$E_p = - \iiint_S m \vec{g} \cdot \overrightarrow{OM} d\lambda(M) = -m \vec{g} \cdot \overrightarrow{OG}.$$

Pour décrire la position du solide S , il suffit de connaître la position de G , que l'on peut repérer grâce à deux angles, appelés *précession* et *nutation* et que l'on note ici respectivement ψ et θ , ainsi que l'angle de *rotation propre* φ du solide autour de son axe. Avec les notations de la figure 3, θ est l'angle entre les vecteurs \vec{Z} (vertical orienté vers le haut) et \vec{z} (axe du solide), et ψ est l'angle entre les vecteurs \vec{X} (l'un des axes horizontaux) et $\vec{u} := (\vec{Z} \wedge \vec{z}) / \|\vec{Z} \wedge \vec{z}\|$. Ces trois angles sont appelés *angles d'Euler*. On voit que l'énergie potentielle s'exprime à l'aide de θ seulement: si

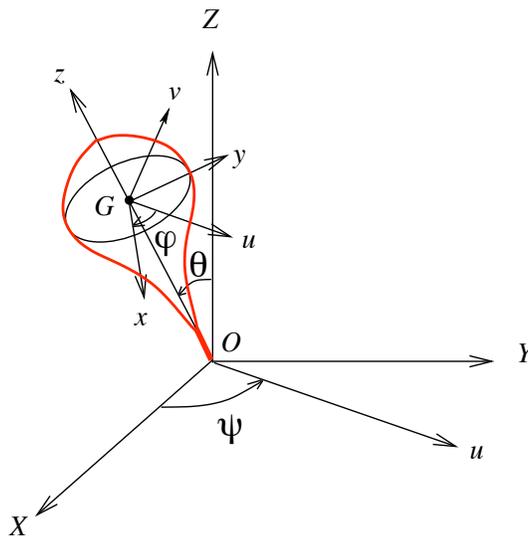


FIG. 3. Toupie et angles d'Euler.

$\ell = \|\overrightarrow{OG}\|$, $E_p = m g \ell \cos \theta$. Quant à l'énergie cinétique, elle est donnée de façon générale par

$$E_c = \iiint_S \frac{1}{2} m \|\vec{v}(M)\|^2 d\lambda(M).$$

Pour la calculer explicitement, il faut savoir qu'en tout point M du solide, la vitesse $\vec{v}(M)$ s'exprime au moyen du vecteur *vitesse de rotation instantanée* $\vec{\Omega}$ par

$$\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

Ce vecteur vitesse de rotation instantanée s'exprime simplement à l'aide des dérivées par rapport au temps des angles d'Euler:

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \vec{Z}.$$

Autrement dit,

$$E_c = \iiint_S \frac{1}{2} m \|\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\|^2 d\lambda(M) =: \frac{1}{2} \mathbf{J}_O(\vec{\Omega}, \cdot \vec{\Omega})$$

La forme quadratique \mathbf{J}_O est diagonalisable dans une base orthonormée appelée *repère principal d'inertie*. Comme S est un solide de révolution, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère principal d'inertie, et les valeurs propres associées, appelées *moments principaux d'inertie*, sont des nombres A , $B = A$ et C , positifs ou nuls puisque \mathbf{J}_O est positive. De plus, si on note $\vec{v} := \vec{z} \wedge \vec{u}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est aussi un repère principal d'inertie. Par suite,

$$E_c = \frac{1}{2} A \|\mathbf{P}_{\vec{u}}(\vec{\Omega})\|^2 + \frac{1}{2} A \|\mathbf{P}_{\vec{v}}(\vec{\Omega})\|^2 + \frac{1}{2} C \|\mathbf{P}_{\vec{z}}(\vec{\Omega})\|^2,$$

où $\mathbf{P}_{\vec{u}}$, $\mathbf{P}_{\vec{v}}$ et $\mathbf{P}_{\vec{z}}$ désignent les projections orthogonales sur les droites dirigées respectivement par \vec{u} , \vec{v} et \vec{z} . Or par définition de θ on a

$$\vec{Z} = \sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{z},$$

donc

$$\mathbf{P}_{\vec{u}}(\vec{\Omega}) = \dot{\theta} \vec{u}, \quad \mathbf{P}_{\vec{v}}(\vec{\Omega}) = \dot{\psi} \sin \theta \vec{v}, \quad \mathbf{P}_{\vec{z}}(\vec{\Omega}) = (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z},$$

et finalement,

$$E_c = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2.$$

En résumé, le lagrangien $L = E_c - E_p$ associé au mouvement de cette toupie s'écrit

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - m g \ell \cos \theta,$$

et les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) \right) = 0$$

donnent

$$A \ddot{\theta} = \left((A \dot{\psi} \cos \theta - C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)) \dot{\psi} + m g \ell \right) \sin \theta,$$

$$A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = \text{cste.}$$

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = \text{cste.}$$

On a ainsi directement deux *intégrales premières* (les deux dernières lignes, qui sont dûes à ce que ψ et φ sont des *variables cycliques*, c'est-à-dire que L n'en dépend pas, bien qu'il dépende de $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$). Par ailleurs, l'énergie totale $E_c + E_p$ est aussi une intégrale première, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + m g \ell \cos \theta = \text{cste.}$$

Les équations du mouvement se réduisent ainsi à une équation scalaire sur θ , de la forme:

$$\dot{\theta}^2 + \left(\frac{\beta - \gamma \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \frac{2m g \ell}{A} \cos \theta = \alpha,$$

où α , β , γ sont des constantes du mouvement (dépendant des conditions initiales, ainsi que de A et C). En posant $\chi = \cos \theta$, on se ramène à une équation de la forme $\dot{\chi}^2 = f(\chi)$ où f est une fonction polynômiale de degré 3 ayant trois zéros réels. Cette équation, pourtant scalaire, admet une solution périodique: ceci est dû au fait que la fonction $\chi \mapsto \sqrt{f(\chi)}$ n'est pas Lipschitzienne aux points où f s'annule, de sorte qu'il n'y a pas unicité des solutions de $\dot{\chi} = \sqrt{f(\chi)}$ (ni de $\dot{\chi} = -\sqrt{f(\chi)}$).

On montre ainsi par une analyse purement qualitative l'existence de *solutions périodiques* dans l'espace physique.

Remarque 3. *La vitesse et l'accélération d'un point mobile P sur un solide lui-même en mouvement (un humain sur la terre, une petite bête sur la toupie, etc.) sont données par les « lois de composition » suivantes:*

$$\vec{v}(\mathbf{P}) = \vec{v}_e(\mathbf{P}) + \vec{v}_r(\mathbf{P}),$$

$$\vec{a}(\mathbf{P}) = \vec{a}_e(\mathbf{P}) + \vec{a}_r(\mathbf{P}) + \vec{a}_c(\mathbf{P}),$$

où $\vec{v}_e(\mathbf{P})$ et $\vec{a}_e(\mathbf{P})$ sont la vitesse et l'accélération d'entraînement, c'est-à-dire, à chaque instant t , la vitesse et l'accélération du point lié au solide se trouvant au point $\mathbf{P}(t)$ (ce point change au cours du temps), $\vec{v}_r(\mathbf{P})$ et $\vec{a}_r(\mathbf{P})$ sont la vitesse et l'accélération d'relative, c'est-à-dire la vitesse et l'accélération dans un référentiel lié au solide, et enfin $\vec{a}_c(\mathbf{P})$ est l'accélération de Coriolis. Cette dernière est définie comme:

$$\vec{a}_c(\mathbf{P}) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(\mathbf{P}).$$

1.3. Électricité. Abandonnons maintenant le vaste domaine de la mécanique pour étudier les circuits électriques, qui servent aussi à modéliser des phénomènes biologiques (battements du coeur par exemple). L'état d'un circuit électrique composé de résistances, bobines et condensateurs, peut être décrit par l'intensité I et la différence de potentiel U dans chacun de ces composants. Les différentes lois de l'électricité conduisent à un système d'équations différentielles pour ces quantités. Considérons par exemple un circuit fermé comprenant un composant de chaque sorte, dans l'ordre résistance-bobine-condensateur (voir la figure 4), la bobine ayant pour inductance L ,

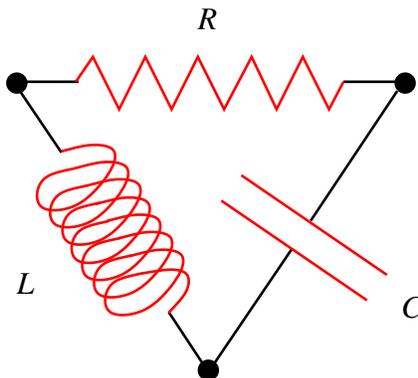


FIG. 4. Circuit RLC.

le condensateur ayant pour capacité C , et le comportement de la résistance étant régi une relation algébrique (loi d'Ohm généralisée) :

$$U_R = F(I_R).$$

Les équations régissant l'évolution de ce circuit sont :

$$\begin{cases} L \frac{dI_L}{dt} = U_L, \\ C \frac{dU_C}{dt} = I_C, \end{cases}$$

assorties des relations de compatibilité

$$U_C = U_L + U_R, \quad I_R = I_L = -I_C.$$

(L'orientation du circuit étant arbitraire, les équations sont fort heureusement invariantes par changement d'orientation.) En éliminant les autres inconnues, on se ramène à un système de deux équations pour $x = I_L$ et $y = U_C$ par exemple :

$$\begin{cases} L \frac{dx}{dt} = y - F(x), \\ C \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Remarque 4. Comme expliqué plus haut, on peut adimensionner ce système. Considérons une intensité de référence I , un potentiel de référence U et un temps de référence T , et posons

$$\tilde{x} := \frac{x}{I}, \quad \tilde{y} := \frac{y}{U}, \quad \tilde{t} := \frac{t}{T}, \quad \tilde{F}(\tilde{x}) := \frac{F(x)}{U}.$$

On voit alors qu'une fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$ est solution du système de départ si et seulement si la fonction $\tilde{t} \mapsto (\tilde{x}(\tilde{t}), \tilde{y}(\tilde{t}))$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{TU}{LI} (\tilde{y} - \tilde{F}(\tilde{x})), \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = -\frac{IT}{CU} \tilde{x}, \end{cases}$$

où il reste deux paramètres sans dimension, à savoir $(TU)/(LI)$ et $(IT)/(CU)$. Notons qu'ils valent tous deux 1 si l'on choisit en particulier $T = \sqrt{LC}$ et $U/I = \sqrt{L/C}$, de sorte que le système adimensionné n'a alors plus aucun paramètre.

2. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à des problèmes où la fonction inconnue dépend à la fois du temps et de la position dans l'espace, problèmes que l'on peut modéliser par une *équation aux dérivées partielles d'évolution*.

2.1. Équation de continuité. Comme point de départ nous allons considérer une équation « universelle », au sens où elle ne résulte d'aucune approximation et intervient dans différents contextes physiques. Il s'agit d'une *loi de conservation* appelée *équation de continuité*. Cette loi fait intervenir une quantité k et son flux $\vec{q} \in \mathbb{R}^d$ pour un phénomène en dimension d d'espace. Par exemple :

- dans un modèle simple de *trafic routier* appelé modèle de *Lighthill-Whitham-Richards*, $d = 1$, $k(x, t)$ représente la *concentration* de véhicules, c'est-à-dire le nombre de véhicules par unité de longueur au point $x \in \mathbb{R}$ de la route (vue de suffisamment loin) à l'instant t et $q(x, t)$ est le *débit* de véhicules par unité de temps,
- en *mécanique des fluides*, $d = 3$, $k(x, t)$ est la *masse volumique* du fluide au point $x \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t et $\vec{q}(x, t) = (q_1, q_2, q_3)(x, t) \in \mathbb{R}^3$ avec $q_j(x, t)$ le *débit massique* (masse par unité de temps et unité d'aire); si l'on s'intéresse au transport de polluants par exemple, $k(x, t)$ peut être la *concentration volumique* d'une espèce chimique (nombre de moles par unité de volume) et \vec{q} son *débit* (nombre de moles par unité de temps et unité d'aire)
- en *électrodynamique*, $d = 1, 2$ ou 3 , $k(x, t)$ est la *densité de charge électrique* qui s'exprime en *Coulomb* (C) par unité de longueur, d'aire ou de volume, selon que $d = 1, 2$ ou 3 , et $\vec{q}(x, t)$ est la *densité de courant électrique*, dont les composantes s'expriment en *Ampère* (A) si $d = 1$, en *Ampère par unité de longueur* si $d = 2$, en *Ampère par unité d'aire* si $d = 3$, en supposant dans tous les cas que l'unité de temps est la seconde (sachant qu'un Ampère vaut exactement un Coulomb par seconde); on peut aussi utiliser une autre unité de densité de charge électrique, à savoir le *Faraday*, qui est la charge électrique d'une mole de charges élémentaires ($1F \approx$

96485C), auquel cas il faut remplacer les Ampère dans la densité de courant électrique par des Faraday par unité de temps; on peut également définir $k(x, t)$ comme le nombre de charges élémentaires (sachant qu'une charge élémentaire vaut environ $1,602 \times 10^{-19} \text{C}$) et $\vec{q}(x, t)$ comme le débit de charges élémentaires.

- en *thermique*, $d = 1, 2$ ou 3 , $k(x, t)$ est la température du matériau au point $x \in \mathbb{R}^d$ à l'instant t et $q(x, t)$ est le *flux de chaleur*.

Quel que soit le contexte physique, l'équation de continuité est valable en l'absence de source extérieure et s'écrit:

$$(18) \quad \partial_t k + \operatorname{div} \vec{q} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{q} := \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} q_j.$$

Voyons comment on l'obtient en dimension 1 d'espace pour simplifier. Pour fixer les idées, disons que $k(x, t)$ est un nombre de particules (atomes, molécules, charges électriques, véhicules, etc.) par unité de longueur et que $q(x, t)$ est le débit de ces particules, c'est-à-dire un nombre de particules par unité de temps. L'équation de continuité

$$(19) \quad \partial_t k + \partial_x q = 0$$

se déduit du bilan de conservation suivant. Soient a, b, s, T tels que $a \leq b, s \leq T$. Le nombre de particules situées dans l'intervalle $[a, b]$ à l'instant T est

$$\int_a^b k(x, T) dx.$$

En l'absence de sources extérieures (qui viendraient ajouter ou retirer des particules), il est égal au nombre de particules situées dans l'intervalle $[a, b]$ à l'instant s , à savoir

$$\int_a^b k(x, s) dx$$

retranché du nombre de particules sortant par le point b entre s et T , à savoir

$$\int_s^T q(b, t) dt,$$

auquel on ajoute le nombre de particules entrant par le point a entre s et T , à savoir

$$\int_s^T q(a, t) dt.$$

Autrement dit, on a le bilan de conservation:

$$\int_a^b k(x, T) dx = \int_a^b k(x, s) dx - \int_s^T q(b, t) dt + \int_s^T q(a, t) dt,$$

que l'on peut aussi écrire

$$\oint_{\partial R} k dx - q dt = 0,$$

où $R = [a, b] \times [s, T]$. Or d'après la formule de *Green-Riemann*

$$\oint_{\partial R} k dx - q dt = - \int_R (\partial_t k + \partial_x q) dx dt.$$

Donc

$$\int_R (\partial_t k + \partial_x q) dx dt = 0, \quad \text{quel que soit le rectangle } R.$$

Ceci montre que l'équation de continuité (19) doit être satisfaite presque partout.

L'obtention de l'équation de continuité (18) en dimension d d'espace est tout à fait analogue, en remplaçant le rectangle R par un pavé de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

2.2. Convection versus diffusion. Cependant l'équation (18) n'est pas encore un modèle mathématique à proprement parler, car elle porte en fait sur $d + 1$ inconnues: les fonctions k et q_j , $j \in \{1, \dots, d\}$. C'est le lien entre k et \vec{q} , appelé *loi de fermeture*, qui définit un modèle. On distingue en fait deux catégories de tels modèles: ceux décrivant un phénomène de *convection*, correspondant au transport de particules suivant un *champ de vitesse* \vec{v} , auquel cas

$$(20) \quad \vec{q} = k \vec{v},$$

et ceux décrivant un phénomène de *diffusion*, dans lesquels

$$(21) \quad \vec{q} = -\lambda \nabla k,$$

où $\lambda > 0$ est le *coefficient de diffusion*. Cette dernière relation signifie que la quantité k a tendance à s'« homogénéiser », son flux étant orienté en direction des zones où k est moins élevée. Lorsque k est une température, (21) est la *loi de Fourier* et λ la *diffusivité thermique* du matériau. Lorsque k est la concentration d'une espèce chimique, (21) est la *loi de Fick*, inspirée de la loi de Fourier. Quant à la relation (20), elle n'est pas encore une loi de fermeture: on a simplement troqué l'inconnue \vec{q} pour \vec{v} . L'équation qui en résulte,

$$\partial_t k + \operatorname{div}(k \vec{v}) = 0,$$

peut être couplée à

- la donnée pure et simple de \vec{v} , par exemple lorsque k est la concentration d'un polluant transporté par un fluide de vitesse prédéterminée \vec{v} ,
- une loi empirique exprimant \vec{v} en fonction de k , ce qui est le cas par exemple dans le modèle de *Lighthill-Whitham-Richards* pour le trafic routier: $v = v_{\max}(1 - k/k_{\max})$,
- une autre loi de conservation, comme celle de la *quantité de mouvement*

$$\partial_t(k\vec{v}) + \operatorname{div}(k\vec{v} \otimes \vec{v} + p\mathbf{I}) = 0,$$

où p est la pression du fluide.

Dans le cas d'un transport (20) par \vec{v} fonction de k , l'équation de continuité (18) s'écrit sous forme d'une *loi de conservation non-linéaire*

$$(22) \quad \partial_t k + \operatorname{div}(k \vec{v}(k)) = 0,$$

tandis que lorsque \vec{q} vérifie (21), (18) devient ce qu'on appelle l'*équation de la chaleur*

$$(23) \quad \partial_t k = \lambda \Delta k.$$

Il se trouve que (22) et (23) ont des propriétés mathématiques très différentes (hormis le fait que l'une soit linéaire et l'autre non): la première propage l'information à vitesse finie (en ce sens elle relève des EDPs dites *hyperboliques*) et pas l'équation de la chaleur; cette dernière régularise instantanément la condition initiale (si k est solution de (23) avec $k(0, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors pour tout $t > 0$, $k(t, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$: ceci se montre facilement grâce à la transformation de Fourier); au contraire, une solution de (22) initialement de classe \mathcal{C}^∞ devient « génériquement » discontinue en temps fini lorsque l'équation est vraiment non-linéaire, c'est-à-dire lorsque $\vec{v}(k)$ dépend effectivement de k (et lorsque $\vec{v}(k)$ est constant, la régularité de la donnée initiale est propagée sans aucune amélioration). Nous allons préciser les propriétés de (22) sur un exemple.

2.3. Trafic routier. Considérons le modèle de Lighthill-Whitham-Richards:

$$\partial_t k + \partial_x(k v_{\max}(1 - k/k_{\max})) = 0.$$

Pour simplifier les calculs à venir, commençons par l'adimensionnaliser en posant

$$\tilde{t} := t/T, \quad \tilde{x} := t/X, \quad \tilde{k} := k/k_{\max}.$$

Si l'on choisit de plus X et T tels que $v_{\max} = X/T$, il ne reste plus aucun paramètre dans le modèle adimensionné (où l'on omet bien sûr les tildes):

$$(24) \quad \partial_t k + \partial_x(k(1-k)) = 0.$$

(Attention, c'est assez pratique de ne pas avoir de paramètre, mais on perd de vue la nature physique des variables, si bien que les erreurs de calcul éventuelles sont plus difficiles à repérer.) On se fixe comme objectif de pouvoir calculer « à la main » la solution de (24) correspondant à l'écoulement d'une *file d'attente*, c'est-à-dire avec une donnée initiale de la forme

$$(25) \quad k_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ell \text{ ou } x > 0, \\ 1 & \text{si } -\ell \leq x \leq 0, \end{cases}$$

où ℓ est la longueur de la file d'attente. (Rappelons que 1 est la concentration adimensionnée maximale.) Nous aurons besoin pour cela de trois ingrédients:

- la *méthode des caractéristiques*, permettant de calculer la solution dans les zones où elle est régulière,
- les *ondes de détente*, permettant de calculer la solution autour à partir d'un point où la donnée initiale a une discontinuité décroissante (comme c'est le cas pour k_0 donnée par (25) en $x = 0$),
- les *ondes de choc*, permettant de définir des solutions discontinues.

2.3.1. *Méthode des caractéristiques.* Une solution régulière de (24) doit vérifier l'équation dite *quasi-linéaire*

$$(26) \quad \partial_t k + (1-2k)\partial_x k = 0.$$

En guise d'introduction à la méthode des caractéristiques, commençons par considérer l'*équation linéarisée* autour d'une constante \underline{k} . C'est l'équation obtenue en première approximation pour une solution de la forme $k = \underline{k} + \varepsilon k_l + o(\varepsilon)$. En ne retenant que les termes d'ordre ε on arrive à l'*équation de transport linéaire* sur k_l :

$$\partial_t k_l + (1-2\underline{k})\partial_x k_l = 0.$$

Celle-ci se résout facilement car elle signifie

$$\frac{d}{dt} k_l(y + (1-2\underline{k})t, t) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

d'où

$$k_l(y + (1-2\underline{k})t, t) = k_0(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, k_l est constante sur les droites d'équation $x = y + (1-2\underline{k})t$, appelées *caractéristiques*, ou encore, les valeurs de la donnée initiale k_0 se propagent à la vitesse $1-2\underline{k}$ (en variables physiques, cette vitesse vaut $v_{\max}(1-2\underline{k}/k_{\max})$). Il est tout à fait remarquable que cette propriété (de propagation sur des droites de la donnée initiale) s'étende aux solutions (régulières) de l'équation non-linéaire (26). Supposons en effet que $(x, t) \mapsto k(x, t)$ soit une telle solution. Soit alors une courbe, appelée *courbe caractéristique*, paramétrée par $t \mapsto \chi(t)$, où χ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d\chi}{dt} = (1-2k(\chi, t)).$$

Alors par dérivation de fonctions composées,

$$\frac{d}{dt} k(\chi(t), t) = \partial_t k(\chi(t), t) + (1-2k(\chi(t), t))\partial_x k(\chi(t), t) = 0.$$

Ceci montre que $k(\chi(t), t)$ est constant et, par contrecoup, que la courbe caractéristique est une droite. Autrement dit, une solution régulière du *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t k + (1 - 2k) \partial_x k = 0, \\ k(x, 0) = k_0(x) \end{cases}$$

est telle que

$$k(y + (1 - 2k_0(y))t, t) = k_0(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

On remarque que si $k_0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ et si $t \in [0, T]$ avec $2T \max_{\mathbb{R}} k'_0 < 1$, la fonction $y \mapsto y + (1 - 2k_0(y))t$ est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ (le « pied » de la caractéristique passant par x) tel que $x = y + (1 - 2k_0(y))t$, ce qui détermine sans ambiguïté $k(x, t) = k_0(y)$. Notons que la condition $2T \max_{\mathbb{R}} k'_0 < 1$ est satisfaite pour tout $T \geq 0$ lorsque k_0 est décroissante: dans ce cas, la méthode que l'on vient de décrire fournit une unique solution régulière globale. En revanche, s'il existe un point où k'_0 prend une valeur strictement positive, le temps

$$T_* := \frac{1}{2 \max_{\mathbb{R}} k'_0}$$

est un *temps d'explosion*, à partir duquel la méthode des caractéristiques n'est plus valable: on vérifie en calculant $\partial_x k$ par le théorème des fonctions implicites que

$$\lim_{t \nearrow T_*} \partial_x k(y + (1 - 2k_0(y))t, t) = +\infty$$

si y est un point où k'_0 atteint son maximum.

En pratique, on peut toujours appliquer la méthode des caractéristiques localement lorsque k_0 est \mathcal{C}^1 par morceaux.

2.3.2. Ondes de détente. Lorsque k_0 a une discontinuité décroissante en un point y_0 , la méthode des caractéristiques ne permet pas de calculer complètement la solution car elle ne fournit aucune valeur dans le secteur compris entre les (demi-)droites d'équation $x = y_0 + (1 - 2k_0(y_0^-))t$ et $x = y_0 + (1 - 2k_0(y_0^+))t$. On va combler ce « vide » par une *onde de détente*. L'idée pour la construire est basée sur l'observation suivante. On suppose pour simplifier que $y_0 = 0$ (ce qui est le cas pour la donnée initiale (25)), et on note $k_{\pm} = k_0(0_{\pm})$, en supposant $k_- > k_+$. Le problème de Cauchy

$$(27) \quad \begin{cases} \partial_t k + (1 - 2k) \partial_x k = 0, \\ k(x, 0) = \begin{cases} k_- & \text{si } x < 0, \\ k_+ & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

(que l'on appelle *problème de Riemann*), est invariant par la dilatation $(x, t) \mapsto (\alpha x, \alpha t)$ quel que soit $\alpha > 0$. Par suite, à supposer qu'il admette une solution unique (ce qui est le cas), celle-ci vérifie nécessairement $k(x, t) = k(\alpha x, \alpha t)$ quel que soit $\alpha > 0$. En particulier pour $\alpha = 1/t$, on voit que $k(x, t) = k(x/t, 1)$. Autrement dit, cette solution ne dépend que de x/t : on dit qu'elle est *auto-similaire*. Sachant cela, on peut facilement la calculer. Cherchons en effet k sous la forme $k(x, t) = \kappa(x/t)$ pour $t > 0$, où la fonction $\xi \mapsto \kappa(\xi)$ est dérivable. Par dérivation de fonctions composées, on obtient

$$(-x/t + 1 - 2\kappa(x/t))\kappa'(x/t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

On en déduit

$$1 - 2\kappa(\xi) = \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}; \quad \kappa'(\xi) \neq 0.$$

Par ailleurs, pour que k satisfasse la condition initiale on doit avoir

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \kappa(\xi) = k_{\pm}.$$

La solution à ce problème en κ est donnée par:

$$\kappa(\xi) = \begin{cases} k_- & \text{si } \xi < 1 - 2k_-, \\ (1 - \xi)/2 & \text{si } 1 - 2k_- \leq \xi \leq 1 - 2k_+, \\ k_+ & \text{si } x > 1 - 2k_+, \end{cases}$$

ce qui donne, pour tout $t > 0$,

$$k(x, t) = \begin{cases} k_- & \text{si } x < (1 - 2k_-)t, \\ (t - x)/2t & \text{si } (1 - 2k_-)t \leq x \leq (1 - 2k_+)t, \\ k_+ & \text{si } x > (1 - 2k_+)t. \end{cases}$$

Cette solution est précisément ce que l'on appelle une onde de détente. (Le fait qu'elle soit affine dans le secteur vient de la forme particulière de la loi $q = k(1 - k)$, polynomiale du second degré. En général, une onde de détente est déterminée par une équation implicite.)

2.3.3. Ondes de choc. Lorsque $k_- < k_+$, la résolution du problème de Cauchy (27) est très différente de ce qui précède. On peut commencer par se convaincre facilement que la méthode des caractéristiques est vouée à l'échec: en effet, les droites caractéristiques issues des points à gauche de la discontinuité initiale ont une vitesse $1 - 2k_-$ strictement supérieure à la vitesse $1 - 2k_+$ des droites caractéristiques issues des points à droite, ce qui fait que les premières s'intersectent avec les secondes. Pour pallier ce problème, on va chercher une solution *auto-similaire* discontinue appelée *onde de choc*. Autrement dit, on cherche une vitesse σ telle que la fonction

$$(28) \quad (x, t) \mapsto k(x, t) = \begin{cases} k_- & \text{si } x < \sigma t, \\ k_+ & \text{si } x > \sigma t, \end{cases}$$

soit une solution de (24). Attention, pour définir les ondes de choc on ne peut pas utiliser la forme quasilinéaire (26) de l'équation, car elle n'a tout simplement pas de sens pour une fonction k discontinue en espace (cela reviendrait à multiplier une fonction de Heaviside par une masse de Dirac). En revanche, on peut donner un sens (faible) à (24) pour toute fonction k admettant une trace intégrable sur les droites verticales et horizontales du plan (x, t) : on l'a même déjà rencontrée plus haut, il s'agit de la formule intégrale

$$\oint_{\partial R} k dx - q dt = 0, \quad \forall R = [a, b] \times [s, T].$$

Si l'on suppose pour fixer les idées que la vitesse cherchée σ est positive, choisissons $a = 0$, $b = \sigma$, $s = 0$, $T = 1$. D'après la formule intégrale ci-dessus, pour que la fonction discontinue (28) soit solution (faible) de (24) il faut que

$$(k_+ - k_-)\sigma = q_+ - q_-, \quad q_{\pm} := k_{\pm}(1 - k_{\pm}),$$

c'est-à-dire encore

$$\sigma = 1 - k_- - k_+.$$

Inversement, on vérifie que cette relation, appelée *condition de Rankine-Hugoniot*, suffit pour que (28) soit solution (faible) de (24). (Noter que lorsque k_+ tend vers k_- , la vitesse σ du choc tend vers la vitesse caractéristique $1 - 2k_-$.) Plus généralement, on montre qu'une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, discontinue à travers une seule courbe Γ , appelée *courbe de choc* paramétrée par $t \mapsto \gamma(t)$ est solution (faible) de (24) si et seulement si elle vérifie

- l'équation (24) (ou (26) de façon équivalente) en tout point (x, t) tel que $x \neq \gamma(t)$ et
- la condition de Rankine-Hugoniot à travers Γ , à savoir:

$$(29) \quad \frac{d\gamma}{dt} = 1 - k(\gamma(t)-, t) - k(\gamma(t)+, t).$$

Attention, contrairement aux courbes caractéristiques, les courbes de choc n'ont aucune raison d'être des droites en général.

2.3.4. *Résolution du problème de la file d'attente.* On considère le problème de Cauchy (24)-(25), que l'on propose de résoudre explicitement à titre d'exercice. Ce problème modélise par exemple l'écoulement d'une file d'attente arrêtée à un feu de circulation situé au point $x = 0$, qui passe au vert à l'instant $t = 0$.

- (1) Montrer, notamment à l'aide de la méthode des caractéristiques, qu'il existe un temps T_0 tel que, pour tout $t \in]0, T_0[$, la solution à l'instant t est composée d'une zone où la concentration est nulle, séparée par un choc stationnaire (c'est-à-dire de vitesse nulle) d'une zone où est la concentration est maximale, elle-même séparée par une onde de détente d'une autre zone où la concentration est nulle.
- (2) Calculer avec ce modèle le temps auquel le dernier véhicule de la file d'attente démarre.
- (3) Calculer la solution au delà du temps T_0 , en montrant notamment grâce à la condition de Rankine–Hugoniot que la courbe de choc est incurvée par l'onde de détente. (Cette condition fournit une équation différentielle ordinaire qu'il faudra résoudre pour calculer la position du choc à chaque instant.)
- (4) Calculer le temps T_1 auquel le dernier véhicule de la file d'attente franchit le feu.
- (5) Exprimer T_0 et T_1 dans les variables physiques. Faire une application numérique avec par exemple $v_{\max} = 50$ km/h et $\ell = 100$ m.

2.4. **Mélange des genres.** On peut bien sûr considérer un modèle prenant en compte à la fois de la convection et de la diffusion en posant

$$(30) \quad \vec{q} = k \vec{v} - \lambda \nabla k$$

dans (18), auquel cas on obtient une équation dite de *convection-diffusion*:

$$\partial_t k + \operatorname{div}(k \vec{v}) = \lambda \Delta k.$$

Ceci correspond par exemple à la propagation de la chaleur à la fois par diffusion et par convection dans un fluide en mouvement. On peut également prendre en compte un *terme source*, dépendant éventuellement de k , auquel cas on parle plutôt de terme de *réaction* (chimique par exemple). Une équation de la forme

$$\partial_t k = \lambda \Delta k + f(k)$$

est appelée *équation de réaction-diffusion*. De nombreux modèles en *biologie* s'écrivent à l'aide d'équation de réaction-diffusion (voir [7]).

2.5. **Équation des ondes.** Nous allons maintenant nous intéresser à une autre équation qui, si elle n'est pas universelle, apparaît comme un modèle satisfaisant dans divers contextes physiques. Elle partage avec les équations de transport par convection la propriété de propager l'information à vitesse finie. Il en est ainsi de l'équation des ondes en acoustique pour la propagation du son (à une vitesse dépendant des variables thermodynamiques mais disons de l'ordre de 340 m/s dans l'air ambiant) et en électromagnétisme pour la propagation de la lumière (à la vitesse vertigineuse de 300 000 km/s). A l'origine, elle a été obtenue par d'Alembert au XVIIIème siècle pour les *cordes vibrantes*. Nous verrons aussi deux autres exemples.

2.5.1. *Cordes vibrantes.* Dans le mouvement d'une corde en tension, les paramètres physiques mis en jeu sont la densité linéaire ρ_0 (masse par unité de longueur) de la corde, reliée à la masse volumique μ_0 et à la section σ_0 par

$$\rho_0 = \sigma_0 \mu_0,$$

et T_0 la tension initiale de la corde, nombre strictement positif ayant la dimension physique d'une force.

Notons $\vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ le déplacement *transversal* de la corde à l'instant t , par rapport à une position de référence $x\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$, et supposons le déplacement longitudinal négligeable. Autrement dit, le point situé en $x\vec{e}_1$ dans la position de référence se retrouve à l'instant t en $\vec{w}(x, t) = x\vec{e}_1 + \vec{u}(x, t)$ avec $\vec{u}(x, t) \perp \vec{e}_1$. Si l'on isole mentalement un morceau de corde situé au repos dans un intervalle $[a, b]$, chacune de ses extrémités est soumise à une force colinéaire à $\partial_x w = \vec{e}_1 + \partial_x u$. C'est ainsi que l'on définit la *tension* $T(x, t) > 0$ de la corde en $\vec{w}(x, t)$, de sorte que la résultante des forces appliquées au morceau de corde est

$$\vec{F} = T(b, t) \partial_x \vec{w}(b, t) - T(a, t) \partial_x \vec{w}(a, t).$$

Or la somme des masses \times accélérations le long du morceau de corde est $\int_a^b \rho_0 \partial_t^2 \vec{w}(x, t) dx$. En intégrant la loi de Newton le long de ce morceau on obtient donc

$$T(b, t) \partial_x \vec{w}(b, t) - T(a, t) \partial_x \vec{w}(a, t) = \int_a^b \rho_0 \partial_t^2 \vec{w}(x, t) dx.$$

En projetant cette égalité vectorielle sur la direction \vec{e}_1 on en déduit

$$T(b, t) - T(a, t) = 0,$$

quels que soient a et b , ce qui montre que $T(x, t)$ ne dépend en fait pas de x . Pour la suite, on suppose que la tension T ne dépend pas non plus de t , c'est-à-dire que $T(x, t) = T_0$ quels que soient x et t . La projection sur \vec{e}_1^\perp de l'égalité vectorielle ci-dessus donne alors

$$T_0 (\partial_x \vec{u}(b, t) - \partial_x \vec{u}(a, t)) = \int_a^b \rho_0 \partial_t^2 \vec{u}(x, t) dx,$$

ou encore

$$\int_a^b (T_0 \partial_x^2 \vec{u}(x, t) - \rho_0 \partial_t^2 \vec{u}(x, t)) dx.$$

Ceci étant vrai quels que soient a et b , on en déduit que \vec{u} vérifie l'équation des ondes mono-dimensionnelle

$$(31) \quad \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0,$$

avec la vitesse

$$c := \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma_0 \mu_0}}.$$

Remarque 5. On voit ici l'importance de la positivité de T_0 (si T_0 était négatif l'équation $T_0 \partial_x^2 \vec{u} - \rho_0 \partial_t^2 \vec{u} = 0$ serait de nature très différente de l'équation des ondes: le problème de Cauchy correspondant serait mal posé). Ceci n'est pas surprenant car une corde qui n'est pas en tension s'affaisse et ne peut pas vibrer.

Remarque 6. On verra plus loin que si la corde est de longueur L , la vitesse c est reliée à la fréquence temporelle ω des ondes « élémentaires » (aussi appelées harmoniques) par $c = 2L\omega$. Autrement dit,

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{4L^2 \sigma_0 \mu_0}}.$$

Du point de vue acoustique, plus ω est grand plus le son produit est perçu comme aigü. On voit ainsi sur l'expression de ω qu'une corde produira un son d'autant plus aigü que la tension sera grande, ou que sa section sera petite, ou encore que sa longueur sera petite. Ceci est conforme à l'expérience avec les instruments de musique à corde tels que violon, guitare ou piano.

2.5.2. *Barres élastiques.* Contrairement à ce qui se passe pour une corde, les déplacements dans une barre élastique rigide sont essentiellement longitudinaux, c'est-à-dire qu'un point situé en $x\vec{e}_1$ dans la position de référence se retrouve après compression ou étirement en $\vec{w}(x, t) = (x + u(x, t))\vec{e}_1$.

On définit encore $T(x, t)$ la tension de la barre en $\vec{w}(x, t)$, mais cette fois elle n'a pas de signe défini (la barre pouvant être indifféremment en compression ou en étirement). Une loi de l'élasticité affirme que pour faire varier de δl un morceau de longueur l_0 il faut une variation de tension δT proportionnelle à $\delta l/l_0$. Quantitativement, on définit E_0 le *module d'Young* du matériau tel que

$$\delta T = E_0 \sigma_0 \frac{\delta l}{l_0},$$

où σ_0 désigne à nouveau la section (de la barre). Par définition, E_0 est un nombre positif homogène à une pression (c'est-à-dire une force par unité d'aire). En appliquant cette loi à un morceau $[x, x + \delta x]$, qui devient $[x + u(x, t), x + \delta x + u(x + \delta x, t)]$ à l'instant t , on obtient

$$T(x, t) - T_0(x) = E_0 \sigma_0 \frac{u(x + \delta x, t) - u(x, t)}{\delta x},$$

d'où à la limite lorsque δx tend vers 0 :

$$T(x, t) = T_0(x) + E_0 \sigma_0 \partial_x u.$$

Pour la suite, on supposera T_0 indépendant de x . D'après la loi de Newton appliquée au morceau de barre compris entre les abscisses a et b , on a

$$T(b, t) - T(a, t) = \int_a^b \rho_0 \partial_t^2 u(x, t) dx,$$

ce que l'on peut encore écrire grâce à l'expression de T en fonction de $\partial_x u$,

$$\int_a^b (E_0 \sigma_0 \partial_x^2 u - \rho_0 \partial_t^2 u(x, t)) dx = 0.$$

Ceci étant vrai quels que soient a et b , on en déduit que u satisfait l'équation des ondes (31) avec la vitesse

$$c = \sqrt{\frac{E_0}{\mu_0}}.$$

Si l'on s'intéresse à la densité ρ le long de la barre, on voit assez facilement qu'elle est donnée par

$$\rho(x, t) = \rho_0 (1 - \partial_x u).$$

En effet, pour chaque morceau de longueur initiale l_0 on a

$$\rho l = \rho_0 l_0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \frac{\delta l}{l_0} = 0.$$

En appliquant cette relation au morceau $[x, x + \delta x]$ et en faisant tendre δx vers 0, on en déduit

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \partial_x u = 0.$$

Par suite, en supposant la densité initiale ρ_0 homogène, on voit par dérivation que ρ satisfait la même équation des ondes que u (et T).

2.5.3. *Tuyaux sonores.* Un peu d'intuition physique (en pensant à nos tympanes par exemple) montre que la tension T exercée par un fluide est liée à la pression p par $p = -T/\sigma_0$. D'où,

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} = -\frac{1}{\chi_0} \frac{\delta v}{v_0},$$

où χ_0 est le coefficient de compressibilité (sans dimension), et v le volume. Or dans un tube de section constante,

$$\frac{\delta v}{v_0} = \frac{\delta l}{l_0}.$$

Donc on a une loi analogue à celle de l'élasticité, avec

$$E_0 = \frac{p_0}{\chi_0}.$$

En particulier, pour un gaz parfait adiabatique,

$$p v^\gamma = \text{cte},$$

d'où $\chi_0 = 1/\gamma$ et $E_0 = \gamma p_0$. On trouve comme vitesse de propagation

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\mu_0}},$$

ce qui l'expression bien connue de la vitesse du son.

Application numérique. Dans l'air, assimilé à un gaz di-atomique, on a approximativement $\gamma = 7/5$ (ceci s'obtient en raisonnant sur le nombre n de degrés de liberté des molécules; de façon générale, $\gamma = (5+n)/(3+n)$). La loi des gaz parfaits

$$p = \frac{\mu RT}{M}, \quad R = 8,3144 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}, \quad M = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1},$$

permet de calculer

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \approx 332 \text{ m.s}^{-1}$$

à une température de 273K.

2.5.4. *Équation des ondes multi-dimensionnelle.* L'analogie de (31) en dimension d d'espace s'écrit

$$(32) \quad \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0,$$

Par exemple pour $d = 2$, cette équation peut modéliser la vibration d'une peau (au lieu d'une corde, ce qui revient pour un musicien à délaissier le violon, la guitare ou le piano pour une timbale), la vibration d'une plaque (au lieu d'une barre: on troque le triangle pour une cymbale), la propagation de vagues à la surface d'un lac. Quant à l'équation des ondes en dimension $d = 3$, c'est l'équation fondamentale de l'acoustique (avec u la vitesse (macroscopique) du fluide ambiant ou la perturbation de pression) et de l'électromagnétisme (avec u le champ électromagnétique).

L'équation des ondes (et ses variantes, non-linéaires notamment) peut faire l'objet d'un cours entier de master. Nous allons nous contenter de quelques propriétés de base, de formules de résolution explicite et d'éléments pour son approximation numérique.

2.5.5. *Propriétés de base de l'équation des ondes.* L'équation (32) est *conservative*, au sens où l'énergie totale

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p, \text{ avec } \mathcal{E}_c := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx, \quad \mathcal{E}_p := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} c^2 \|\nabla u\|^2 dx,$$

est conservée au cours du temps. En effet, supposons que $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}([0, T]; H^2(\mathbb{R}^d))$ soit une solution. Alors, en multipliant l'équation par $\partial_t u$, on obtient après intégration par parties du second morceau :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} c^2 \|\nabla u\|^2 dx = 0.$$

Par ailleurs, l'équation (32) propage l'information à vitesse finie c , comme on va le voir sur les formules explicites.

2.5.6. *Formules de résolution explicite.*

Forme générale des solutions en dimension 1. Plusieurs approches sont possibles. Nous allons en voir trois. La première consiste à remarquer la décomposition de l'opérateur des ondes (appelé aussi *d'Alembertien*) en

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x).$$

Par suite, pour résoudre

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$$

il suffit de résoudre successivement

$$(\partial_t - c \partial_x) v = 0,$$

$$(\partial_t + c \partial_x) u = v.$$

Or la première équation est une simple *équation de transport*, dont la solution ne dépend que de $(x + ct)$. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que

$$\frac{d}{dt} v(y - ct, t) = \partial_t v - c \partial_x v = 0,$$

et donc $v(y - ct, t) = v(y, 0)$ quel que soit y . En renversant les notations, on a $v(x, t) = v(x + ct, 0)$ quel que soit x . Notons plus simplement $h(y) = v(y, 0)$. Il faut ensuite résoudre l'équation de transport avec terme source :

$$(\partial_t + c \partial_x) u(x, t) = h(x + ct).$$

La solution générale de l'équation homogène est $u(x, t) = g(x - ct)$ (par le même argument que ci-dessus). De plus, en notant f une primitive de $h/2c$, on a une solution particulière « évidente » $u(x, t) = f(x + ct)$. Finalement, par linéarité, la solution recherchée est de la forme :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Une seconde méthode consiste à faire le changement de variables

$$(x, t) \mapsto (y, z) := (x + ct, x - ct).$$

On a

$$\partial_x = \partial_y + \partial_z, \quad \partial_t = c(\partial_y - \partial_z),$$

d'où

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = c^2 ((\partial_y - \partial_z)^2 - (\partial_y + \partial_z)^2) = -2c^2 \partial_{yz}^2.$$

On doit donc résoudre le problème

$$\partial_{yz}^2 \tilde{u} = 0$$

dans les nouvelles variables, dont la solution est évidemment de la forme

$$\tilde{u}(y, z) = f(y) + g(z).$$

Problème de Cauchy sur \mathbb{R} . Soit à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Il s'agit d'exprimer les fonctions f et g apparaissant dans la forme générale de la solution en fonction de ϕ et ψ . Les deux équations à satisfaire sont

$$\begin{cases} \phi(x) = f(x) + g(x), \\ \psi(x) = c f'(x) - c g'(x). \end{cases}$$

En dérivant la première, on en déduit

$$\begin{cases} 2c f'(x) = c \phi'(x) + \psi(x), \\ 2c g'(x) = c \phi'(x) - \psi(x), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy + \text{cste}, \\ g(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy + \text{cste}', \end{cases}$$

Finalement, en revenant à l'équation non dérivée $\phi(x) = f(x) + g(x)$, on en déduit

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

Cette formule est appelée *formule de d'Alembert*. Réciproquement, si ϕ est au moins deux fois dérivable, et ψ au moins une fois dérivable, la formule de D'Alembert fournit la solution cherchée. (En fait, l'équation des ondes étant linéaire, elle admet des solutions « faibles » pour des données initiales ϕ et ψ moins régulières.)

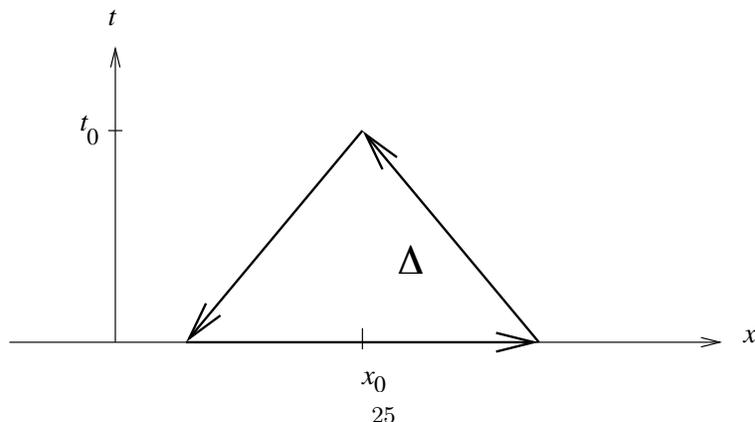
On peut également résoudre le problème de Cauchy par une troisième méthode, qui a en outre le mérite d'autoriser un terme source (correspondant à un « forçage » : on peut penser par exemple à la gravité). Considérons l'équation des ondes avec terme source :

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = f,$$

et cherchons la valeur en (x_0, t_0) de la solution du problème de Cauchy associé aux données initiales $u(x, 0) = \phi(x)$, $\partial_t u(x, 0) = \psi(x)$. On appelle « cône » de dépendance (qui est en fait ici un triangle) de (x_0, t_0) l'ensemble

$$\Delta := \{(x, t); x_0 - c(t_0 - t) \leq x \leq x_0 + c(t_0 - t)\}.$$

Par la *formule de Green* on a



$$\int_{\Delta} (\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u) = - \int_{\partial\Delta} (\partial_t u \, dx + c^2 \partial_x u \, dt).$$

On décompose bien sûr cette intégrale en trois morceaux. L'un vaut simplement

$$\int_{x_0-ct}^{x_0+ct} \psi(y) \, dy.$$

D'autre part, le long du segment

$$\{(x, t); x = x_0 - c(t - t_0)\},$$

on a

$$\partial_t u \, dx + c^2 \partial_x u \, dt = -c(\partial_t u \, dt + \partial_x u \, dx).$$

Donc l'intégrale correspondante vaut

$$-c(u(x_0, t_0) - \phi(x_0 + c t_0)).$$

De la même façon, l'intégrale restante vaut

$$-c(u(x_0, t_0) - \phi(x_0 - c t_0)).$$

En additionnant, on obtient donc

$$\int_{\Delta} (\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u) \, dx \, dt = \int_{x_0-ct}^{x_0+ct} \psi(y) \, dy - 2c u(x_0, t_0) + c(\phi(x_0 + c t_0) + \phi(x_0 - c t_0)),$$

d'où la formule

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} (\phi(x_0 + c t_0) + \phi(x_0 - c t_0)) + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(y) \, dy + \frac{1}{2c} \int_{\Delta} f \, dx \, dt$$

(dont la formule de d'Alembert est évidemment un cas particulier, avec $f \equiv 0$).

Problème de Dirichlet sur \mathbb{R}^+ . La résolution du problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0, & x > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x > 0, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

lorsque ϕ et ψ satisfont les conditions de compatibilité $\phi(0) = 0$ et $\psi(0) = 0$, se ramène à celle du problème de Cauchy par la *méthode dite des images*. En effet, si u est solution, alors $(x, t) \mapsto u(-x, t)$ est solution du problème symétrique, posé sur \mathbb{R}^- , avec ϕ et ψ prolongées en des fonctions impaires : $\phi(x) = -\phi(-x)$ et $\psi(x) = -\psi(-x)$. Donc la fonction u définie comme la superposition des deux solutions est une solution sur \mathbb{R} tout entier, sauf peut-être en 0 . Réciproquement, soit

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + c t) + \phi(x - c t)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) \, dy.$$

Cette fonction satisfait l'équation des ondes partout où elle est deux fois dérivable. C'est le cas si ϕ et ψ sont respectivement deux fois et une fois dérivable sur \mathbb{R}^+ , sauf peut-être sur le *cône caractéristique*

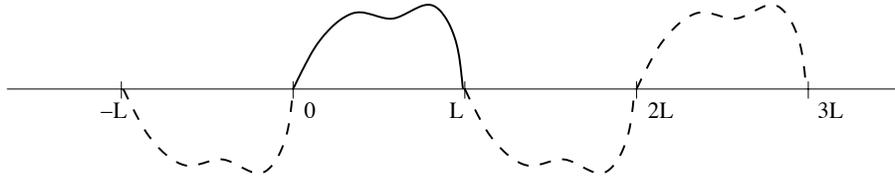
$$\{(x, t); x \pm c t = 0\}.$$

(Si ϕ satisfait la condition de compatibilité supplémentaire $\phi'(0) = 0$, il n'y a pas de problème.) De plus, lorsque ϕ et ψ sont impaires, il en est de même de u . Par conséquent, c'est bien une solution du problème de Dirichlet homogène, sauf peut-être sur la demi-droite $\{x = c t\}$. Lorsque $x > c t$,

les fonctions ϕ et ψ sont évaluées en des points positifs. Lorsque $x < ct$, on peut vouloir exprimer $u(x, t)$ à l'aide des fonctions ϕ et ψ originales, définies sur \mathbb{R}^+ . On trouve ainsi la formule

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(ct + x) - \phi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(y) dy.$$

Problème de Dirichlet sur un intervalle borné $[0, L]$. La « méthode des images » se généralise en prolongeant ϕ et ψ en fonctions impaires et $2L$ -périodiques, comme sur le dessin ci-dessous, ce



qui permet de calculer u à nouveau par la formule de d'Alembert :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

Cela fournit bien une solution de l'équation des ondes, en dehors de

$$\{(x, t); x \pm ct \in L\mathbb{Z}\}.$$

Cette solution est impaire et $2L$ -périodique, donc satisfait les conditions de Dirichlet homogènes en $x = 0$ et $x = L$.

Une autre approche consiste à utiliser les séries de Fourier. En effet, les fonctions prolongées ϕ et ψ ont des *séries de Fourier* en **sin** (puisqu'elles sont impaires et s'annulent en $\pm L$):

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \sin(\pi n x / L), \quad \psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \sin(\pi n x / L),$$

où les sommes sont à comprendre au sens de la convergence dans $L^2_{\text{pér}}([-L, L])$, ou en un sens plus fort si ϕ et ψ sont assez régulières (la série de Fourier d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 converge uniformément). On cherche alors u sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_n(t) \sin(\pi n x / L),$$

ce qui donne la famille d'équations différentielles ordinaires

$$c_n'' + (c\pi n/L)^2 c_n = 0,$$

dont les solutions sont de la forme

$$c_n(t) = \alpha_n \cos(\pi c t n / L) + \beta_n \sin(\pi c t n / L).$$

Afin de satisfaire les données initiales, on doit avoir $c_n(0) = a_n$, $c_n'(0) = b_n$, ce qui donne

$$\alpha_n = a_n, \quad \beta_n = \frac{L}{\pi c} \frac{b_n}{n}.$$

On constate en particulier (comme évoqué plus haut) que la *fréquence³ temporelle* de u est égale à $\omega = c/(2L)$. De plus, si cette dernière est la fréquence de la « première harmonique » c_1 , on voit que c_n a même comme fréquence le multiple $n\omega$.

³inverse de la période

Problème de Cauchy sur \mathbb{R}^3 . Soit à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

On va utiliser la *méthode des moyennes sphériques*, qui permet de se ramener à un problème en dimension 1, que l'on sait résoudre d'après de qui précède. Pour cela on associe à u la fonction de $(r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\bar{u}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u,$$

où S_r est la sphère de rayon r :

$$S_r := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = r\}.$$

Pour obtenir l'équation satisfaite par u , on applique la formule de Green sur la boule

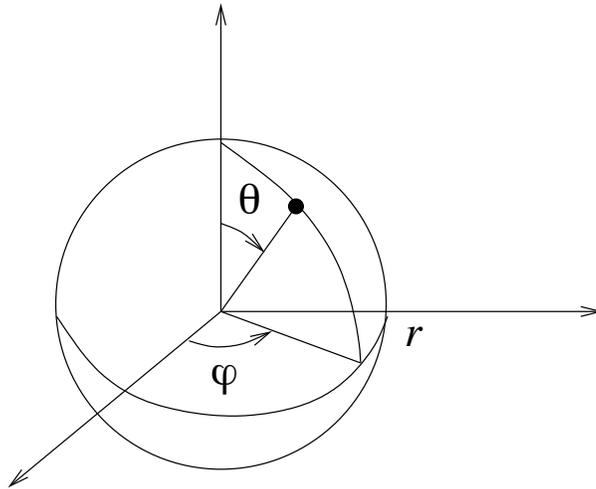
$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq r\},$$

$$\int_{B_r} \Delta u = \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n},$$

où n est le vecteur normal unitaire sur $S_r = \partial B_r$, sortant de B_r . Pour que u soit solution de l'équation des ondes, il faut donc que

$$\int_{B_r} \partial_t^2 u = c^2 \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n}.$$

En utilisant les coordonnées sphériques habituelles, représentées ci-dessous



cette égalité s'écrit de façon équivalente :

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_t^2 u \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho = c^2 r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_r u \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Or, par définition,

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

On déduit donc de l'équation précédente :

$$\int_0^r \rho^2 \partial_t^2 \bar{u} \, d\rho = c^2 r^2 \partial_r \bar{u}.$$

D'où, en dérivant une fois par rapport à r :

$$r^2 \partial_t^2 \bar{u} = c^2 \partial_r (r^2 \partial_r \bar{u}),$$

c'est-à-dire

$$\partial_t^2 \bar{u} - c^2 \partial_r^2 \bar{u} - 2 \frac{c^2}{r} \partial_r \bar{u} = 0.$$

(Ceci n'est rien d'autre que l'équation des ondes axisymétrique.) En posant $v := r \bar{u}$, on se ramène à une équation des ondes monodimensionnelle ordinaire :

$$\partial_t^2 v - c^2 \partial_r^2 v = 0.$$

Puisque v doit s'annuler en $r = 0$, cela revient à chercher la solution du problème de Dirichlet dans \mathbb{R}^+ , avec $v(r, 0) = r \bar{\phi}(r)$, $\partial_t v(r, 0) = r \bar{\psi}(r)$ et les notations évidentes

$$\bar{\phi}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} \phi, \quad \bar{\psi}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} \psi.$$

On a une formule explicite pour v :

$$v(r, t) = \frac{1}{2} ((ct + r) \bar{\phi}(ct + r) - (ct - r) \bar{\phi}(ct - r)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) dy, \quad 0 \leq r \leq ct,$$

que l'on peut réécrire

$$v(r, t) = \partial_t \left(\frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\phi}(y) dy \right) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) dy.$$

On récupère ensuite $u(0, t) = \bar{u}(0, t)$ par dérivation, puisque $\bar{u}(0, t) = \partial_r v(0, t)$. Comme

$$\partial_r \left(\frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) dy \right) \Big|_{r=0} = t \bar{\psi}(ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \psi,$$

avec la même formule pour ϕ , on en déduit

$$u(0, t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \phi \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \psi.$$

Bien sûr, on a la même formule lorsqu'on translate 0 en x_0 . Finalement, on a obtenu la formule générale, dite de *Kirchhoff* :

$$u(x_0, t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|x-x_0\|=ct} \phi \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|x-x_0\|=ct} \psi.$$

(Il est possible de montrer cette formule en utilisant la transformation de Fourier.)

On observe sur la formule de Kirchhoff que la solution au point (x_0, t) ne dépend des données initiales qu'au voisinage de la *sphère* $\{x; \|x - x_0\| = ct\}$. Autrement dit, si les données initiales sont concentrées dans $\{x; \|x - x_0\| < R\}$, la solution au point (x_0, t) est nulle pour tout $t > R/c$. C'est ce qu'on appelle le *principe de Huyghens*. Il est faux en dimension 2 comme on va le voir.

Problème de Cauchy sur \mathbb{R}^2 . On va se servir de la formule de Kirchhoff en dimension 3 pour obtenir une formule en dimension 2. Il suffit en effet de résoudre le problème étendu à \mathbb{R}^3 , avec ϕ et ψ indépendantes de la troisième variable $x_3 =: z$. Pour une fonction ψ dépendant seulement de $(x_1, x_2) =: (x, y)$, l'intégrale double $\int_{S_r} \psi$ se décompose en

$$\int_{S_r} \psi = 2 \int_{S_r \cap \{z > 0\}} \psi,$$

et la demi-sphère $S_r \cap \{z > 0\}$ est paramétrée par (x, y) :

$$S_r \cap \{z > 0\} = \{(x, y, z); x^2 + y^2 < r^2 \text{ et } z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\},$$

l'élément de surface étant

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

D'où

$$\int_{S_r} \psi = 2r \int_{x^2+y^2 \leq r} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

On en déduit la formule explicite en dimension 2 :

$$u(x_0, y_0, t_0) = \partial_t \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq c^2 t^2} \frac{\phi(x, y)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} dx dy \right) + \frac{1}{2\pi c} \int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq c^2 t^2} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

On remarque sur cette formule que, même avec des données initiales concentrées dans $\{x; \|x - x_0\| < R\}$, la solution au point (x_0, t) ne « s'éteint jamais ».

2.5.7. *Approximation numérique.* Les formules de résolution explicites que l'on vient de voir ne sont pas toujours commodes à mettre en œuvre numériquement, d'autant qu'elles portent sur le problème de Cauchy posé dans tout l'espace, alors qu'en pratique on doit résoudre le problème avec des conditions aux limites. Même si on a vu comment traiter certains problèmes aux limites par la méthode des images, cela nécessite un calcul d'intégrale en chaque point de résolution, ce qui n'est pas façon la plus efficace de résoudre le problème. Nous allons construire et étudier une méthode de résolution approchée, très simple à implémenter et qui donne de bons résultats.

Schéma de base. Une méthode élémentaire de discrétisation des EDP est celle dite des *différences finies*, consistant à remplacer les dérivées exactes par des dérivées approchées discrètes au moyen de la formule de Taylor. En ce qui concerne l'équation des ondes, on doit approcher des dérivées secondes, ce que l'on peut faire en remarquant que pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 , la formule de Taylor donne

$$f''(y) = \frac{f(y+h) - 2f(y) + f(y-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h).$$

On se limitera dans cette présentation à la dimension 1.

Étant donné un pas d'espace Δx et un pas de temps Δt , on cherche à calculer u_j^n , supposé approcher la solution exacte de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$$

au point (x_j, t^n) , avec $x_{j+1} - x_j = \Delta x$ et $t^{n+1} - t^n = \Delta t$. En appliquant la formule précédente dans la direction du temps et dans la direction de l'espace, et en substituant les approximations ainsi obtenues dans l'équation des ondes on obtient le schéma centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

L'ordre en temps, respectivement en espace, d'un schéma est l'ordre en Δt , respectivement en Δx , de l'erreur de troncature, obtenue en appliquant le schéma à la solution exacte :

$$e_j^n := \frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1})}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2}.$$

Dans le cas présent, on a

$$e_j^n = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x),$$

le schéma est donc d'ordre 1 : c'est le minimum que l'on puisse faire pour espérer approcher effectivement la solution exacte !

Une seconde propriété importante est la *stabilité* d'un schéma. Une condition nécessaire de stabilité dans ℓ^2 s'obtient facilement grâce à la *transformée de Fourier discrète*.

Définition 1. La transformée de Fourier discrète d'une suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est l'unique fonction $\mathcal{F}_d(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier sont les u_n . Plus précisément, $\tilde{\mathbf{u}}$ est la limite dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ des sommes partielles de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{-2i\pi n\omega}.$$

D'après la formule de Parseval, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 = \int_0^1 |\tilde{\mathbf{u}}(\omega)|^2 d\omega,$$

ce qui signifie que la transformation de Fourier discrète :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{T}) \\ \mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

est une isométrie. On observe que pour l'opérateur de « shift » :

$$\mathcal{T} : \mathbf{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto \mathbf{U} = (U_j := u_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \text{on a } (\mathcal{F}_d \circ \mathcal{T}(\mathbf{u}))(\zeta) = \tilde{\mathbf{U}}(\zeta) = e^{2i\pi\zeta} \tilde{\mathbf{u}}(\zeta).$$

Le schéma centré se réécrivant

$$u_j^{n+1} = s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + 2(1-s)u_j^n - u_j^{n-1}, \quad s := c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2},$$

(noter que s est un nombre sans dimension) ou encore, en posant $v_j^n := u_j^{n-1}$:

$$\begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ u_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s) + s(\mathcal{T} + \mathcal{T}^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^n \\ u_j^n \end{pmatrix},$$

par transformation de Fourier discrète (en espace seulement!), on obtient

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^{n+1}(\zeta) \\ \hat{u}^{n+1}(\zeta) \end{pmatrix} = \mathbf{H}(\zeta) \begin{pmatrix} \hat{v}^n(\zeta) \\ \hat{u}^n(\zeta) \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{H}(\zeta)$ est ce qu'on appelle la *matrice d'amplification* du schéma. Elle vaut simplement

$$\mathbf{H}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s) + s(e^{2i\pi\zeta} + e^{-2i\pi\zeta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s(1-\cos 2\pi\zeta)) \end{pmatrix}.$$

L'itération ci-dessus se résout explicitement en

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^n(\zeta) \\ \hat{u}^n(\zeta) \end{pmatrix} = \mathbf{H}(\zeta)^n \begin{pmatrix} \hat{v}^0(\zeta) \\ \hat{u}^0(\zeta) \end{pmatrix}.$$

On pourra donc contrôler la norme \mathbf{L}^2 de la solution à l'itération n en fonction de la norme \mathbf{L}^2 initiale si et seulement si la norme de la matrice $\mathbf{H}(\zeta)^n$ est uniformément bornée (en n et ζ). Par la propriété d'isométrie de la transformation de Fourier discrète, ceci fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité ℓ^2 du schéma. Dans l'état, elle n'est cependant pas très exploitable. On n'a pas précisé la norme matricielle à utiliser. En fait, il suffit qu'il en existe une telle que $\mathbf{H}(\zeta)^n$ soit bornée. Une condition nécessaire pour cela, dite *condition de von*

Neumann, est que le rayon spectral de $H(\zeta)$ soit inférieur ou égal à 1. Or les valeurs propres de $H(\zeta)$ sont les racines de

$$\lambda^2 - 2b(\zeta)\lambda + 1 = 0, \quad b(\zeta) := 1 - s(1 - \cos 2\pi\zeta).$$

Le produit de ces racines vaut donc 1. Si jamais elles sont réelles, l'une sera nécessairement de valeur absolue supérieure à 1, et la condition de von Neumann sera violée. Il faut donc que le discriminant de cette équation soit négatif (ou nul), c'est-à-dire que $|b(\zeta)| \leq 1$ quel que soit ζ . Ceci revient à demander $s \leq 1$. Réécrite en fonction de Δt et Δx , cette condition est

$$c\Delta t \leq \Delta x.$$

Ce type de condition, majorant le pas de temps en fonction du pas d'espace, est appelée *condition de Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL en abrégé). Par extension, le nombre sans dimension $c\Delta t/\Delta x$ est souvent appelé *nombre CFL*. On constate en pratique que si cette condition n'est pas satisfaite, le schéma « diverge » (au sens où les valeurs numériques obtenues en guise de solution approchée deviennent démesurément grandes) au bout de quelques itérations.

INDEX

- énergie
 - cinétique, 7, 10
 - potentielle, 7, 10
 - totale, 7
- équation
 - aux dérivées partielles d'évolution, 14
 - de réaction-diffusion, 20
 - de transport linéaire, 17
 - quasi-linéaire, 17
 - conservative, 24
 - de continuité, 14
 - de la chaleur, 16
 - de Ludwig, 4
 - de Malthus, 2
 - de Verhulst, 3
 - linéarisée, 17
 - logistique, 4
- équation des ondes axisymétrique, 29
- équation différentielle
 - du second ordre, 6
 - linéaire du premier ordre, 2
 - linéaire du premier ordre avec terme source, 3
- équation scalaire, 7
- équation de transport, 24
- accélération, 6
- accélération de la pesanteur, 6
- adimensionnalisation, 4
- Ampère, 14
- angles d'Euler, 11
- auto-similaire, 18, 19
- brachistochrone, 9
- cône caractéristique, 26
- cône de dépendance, 25
- calcul des variations, 9
- Cauchy
 - problème de, 6, 18
- centre de gravité, 11
- champ
 - de gravité, 10
 - de vitesse, 16
- cinématique, 11
- coefficient de diffusion, 16
- conservation
 - de l'énergie totale, 7
- conservativité, 5
- convection-diffusion, 20
- convention, 16
- corde vibrante, 20
- Coriolis
 - accélération de, 13
- Coulomb, 14
- Courant-Friedrichs-Lewy
 - condition de, 32
 - nombre de, 32
- courbe de choc, 19
- cycle, 8
- cyclique
 - variable, 12
- cycloïde, 10
- d'Alembert
 - formule de, 25
- d'Alembertien, 24
- débit, 14
- densité
 - de charge électrique, 14
 - de courant électrique, 14
- différences finies, 30
- diffusion, 16
- diffusivité thermique, 16
- discrétisation
 - pas de, 3
 - schéma de, 3
- discret
 - modèle, 2
- Duhamel
 - formule de, 3
- entraînement
 - vitesse et accélération, 13
- erreur de troncature, 30
- Euler
 - angles d', 11
- Euler-Lagrange
 - équation d', 9
- Faraday, 14
- file d'attente, 17
- flux, 14
- flux de chaleur, 15
- force, 6
- forme optimale, 9
- formule d'Euler, 3
- Fourier
 - série de, 27
- Green
 - formule de, 25
- Green-Riemann
 - formule de, 15
- harmonique, 21
- Huygens
 - principe de, 29
- hyperbolique
 - EDP, 16
- inertie

- moment principal d', 12
- repère principal, 12
- intégrale première, 5, 12
- invariance par le flot, 5
- Kirchhoff
 - formule de , 29
- Lighthill-Whitham-Richards
 - modèle de, 16
- loi
 - de conservation, 14
 - de conservation non-linéaire, 16
 - de la gravitation universelle, 10
 - de fermeture, 16
 - de Fick, 16
 - de Fourier, 16
 - de Newton, 6
- méthode
 - des caractéristiques, 17
- méthode des images, 26
- matrice d'amplification, 31
- moyenne sphérique, 28
- Newton
 - loi de, 6
- mutation, 11
- onde de choc, 17, 19
- onde de détente, 17, 18
- orbite hétérocline, 8
- ordre, 30
- oscillateur harmonique, 6
- pendule simple, 7
- phases
 - espace des, 10
- plan de phase, 6, 8
- points d'équilibre, 8
- portrait de phase, 3, 8
- position, 6
- potentiel, 10
- précession, 11
- réaction, 20
- Rankine-Hugoniot
 - condition de, 19
- relative
 - vitesse et accélération, 13
- Riemann
 - problème de, 18
- rotation propre, 11
- schéma d'Euler explicite, 3
- solution périodique, 6, 13
- stabilité, 31
- taux
 - d'accroissement naturel, 2
 - de mortalité, 2
 - de natalité, 2
 - temps d'explosion, 18
 - tension, 21
 - terme source, 3, 20
 - théorème
 - π de Buckingham, 4
 - de Cauchy-Lipschitz, 5
 - trajectoire, 5
 - trajectoire parabolique, 6
 - transformation de Fourier discrète, 31
 - variables séparées, 5
 - vitesse, 6
 - von Neumann
 - condition de , 32

RÉFÉRENCES

- [1] S. S. Antman. *The simple pendulum is not so simple*. SIAM Review, vol. 40, n° 4, pp. 927–930, 1998.
- [2] S. Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles. Cours et exercices corrigés*. Dunod, Collection Sciences Sup, 2010.
- [3] M. Braun. *Differential equations and their applications*, volume 11 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1993. An introduction to applied mathematics.
- [4] C. Chicone. *Ordinary differential equations with applications*, volume 34 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [5] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences. Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1996.
- [6] J. David Logan. *Applied mathematics*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, third edition, 2006.
- [7] J. D. Murray. *Mathematical biology. I*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. An introduction.
- [8] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris, 1961.