

Propagation d'ondes

Il existe bon nombre d'ouvrages de référence traitant de la propagation des ondes, voir par exemple [1, 2, 3, 4, 5]. L'objet de ces notes est d'en présenter quelques aspects, en vue de l'épreuve de modélisation à l'agrégation.

Partie I

L'équation des ondes en dimension 1

On appelle *équation des ondes* (linéaire) l'ÉDP d'évolution, du second ordre en temps (t) et en espace (x),

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0,$$

où c est un nombre réel positif donné, homogène à une vitesse. Cette ÉDP apparaît naturellement dans beaucoup de problèmes physiques, dont on donne quelques exemples ci-après.

1 Quelques modèles physiques

Pour information on mentionnera entre $\{ \}$ la dimension des quantités physiques mises en jeu, selon la table suivante

symbole	signification	unité S.I.
m	masse	kilogramme (kg)
l	longueur	mètre (m)
t	temps	seconde (s)
T	température	Kelvin (K)
v	vitesse	$m.s^{-1}$
f	force	Newton, $1 N = 1 kg.m.s^{-2}$
p	pression	Pascal, $1 Pa = 1 kg.m^{-1}.s^{-2}$
e	énergie	Joule, $1 J = 1 kg.m^2.s^{-2}$

1.1 Cordes vibrantes

Le déplacement d'une corde en tension obéit, au moins au premier ordre, à une équation des ondes, comme l'avait déjà montré D'Alembert au XVIIIème siècle. Les paramètres

physiques mis en jeu sont la densité linéaire $\rho_0 \{m.l^{-1}\}$, reliée à la densité ω_0 (ou masse volumique $\{m.l^{-3}\}$) par

$$\rho_0 = \sigma_0 \omega_0,$$

où $\sigma_0 \{l^2\}$ est la section de la corde, et T_0 la tension initiale de la corde, nombre > 0 homogène à une force.

Soit $u(x, t) \in \mathbb{R}^3$ le déplacement *transversal* de la corde à l'instant t , par rapport à une position de référence $x e_1 \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$. On suppose le déplacement longitudinal négligeable. Autrement dit, le point situé en $x e_1$ dans la position de référence se retrouve en $w(x, t) = x e_1 + u(x, t)$, et $u(x, t) \perp e_1$.

Soit $T(x, t)$ la tension de la corde en $w(x, t)$. C'est un nombre positif tel qu'un morceau de corde $[x, x + \delta x]$ ($\delta x > 0$) soit soumis à la force

$$T(x + \delta x, t) \theta(x + \delta x, t) - T(x, t) \theta(x, t),$$

où $\theta(x, t) = \partial_x w(x, t)$ est tangent à la corde en $w(x, t)$.

L'accélération de la corde au point $w(x, t)$ est simplement $\partial_{tt}^2 w(x, t) = \partial_{tt}^2 u(x, t)$. La relation fondamentale de la mécanique, ou loi de Newton ($F = m \gamma$) appliquée au morceau de corde $[x, x + \delta x]$ s'écrit donc, pour la composante parallèle à e_1 :

$$T(x + \delta x, t) - T(x, t) = 0,$$

et pour la composante orthogonale à e_1 :

$$T(x + \delta x, t) \partial_x u(x + \delta x, t) - T(x, t) \partial_x u(x, t) = \int_x^{x+\delta x} \rho_0 \partial_{tt}^2 u(y, t) dy.$$

Par suite, $T(x, t) = T_0(t)$ est indépendant de x , et en faisant tendre δx vers 0 dans la seconde équation, on obtient

$$T_0 \partial_{xx}^2 u = \rho_0 \partial_{tt}^2 u.$$

Si T_0 est de plus supposé indépendant de t , on a bien une équation des ondes, avec

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}},$$

à condition que T_0 soit effectivement positif (une corde qui n'est pas en tension s'affaisse et ne peut pas vibrer!).

1.2 Barres élastiques

À l'inverse d'un corde, dans une barre élastique rigide, on peut ne considérer que les déplacements longitudinaux, c'est-à-dire qu'un point situé en $x e_1$ dans la position de référence se retrouve après compression ou étirement en $w(x, t) = x e_1 + u(x, t)$ avec $u(x, t) \parallel e_1$.

On définit encore $T(x, t)$ la tension de la barre en $w(x, t)$, mais cette fois elle n'a pas de signe défini (la barre pouvant être indifféremment en compression ou en étirement). Une loi de l'élasticité affirme que pour faire varier de δl un morceau de longueur l_0 il faut

une variation de tension δT proportionnelle à $\delta l/l_0$. Quantitativement, on définit E_0 le *module d'Young* du matériau tel que

$$\delta T = E_0 \sigma_0 \frac{\delta l}{l_0}.$$

Par définition, E_0 est un nombre positif homogène à une pression. En appliquant cette loi à un morceau $[x, x + \delta x]$, qui devient $[x + u(x, t), x + \delta x + u(x + \delta x, t)]$, on obtient

$$T(x, t) - T_0(x) = E_0 \sigma_0 \frac{u(x + \delta x, t) - u(x, t)}{\delta x},$$

d'où à la limite lorsque δx tend vers 0 :

$$T(x, t) = T_0(x) + E_0 \sigma_0 \partial_x u.$$

D'autre part, d'après la loi de Newton appliquée au morceau de corde $[x, x + \delta x]$:

$$T(x + \delta x, t) - T(x, t) = \int_x^{x+\delta x} \rho_0 \partial_{tt}^2 u(y, t) dy,$$

d'où à la limite lorsque δx tend vers 0 :

$$\partial_x T = \rho_0 \partial_{tt}^2 u.$$

En supposant la tension de référence T_0 homogène, c'est-à-dire indépendante de x , on en déduit que u (ainsi que T d'ailleurs, par dérivation) satisfait l'équation des ondes de vitesse

$$c = \sqrt{\frac{E_0}{\omega_0}}.$$

Si l'on s'intéresse à la densité ρ le long de la barre, on voit assez facilement qu'elle est donnée par

$$\rho(x, t) = \rho_0 (1 - \partial_x u).$$

En effet, pour chaque morceau de longueur initiale l_0 on a

$$\rho l = \rho_0 l_0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \frac{\delta l}{l_0} = 0.$$

En appliquant cette relation au morceau $[x, x + \delta x]$ et en faisant tendre δx vers 0, on en déduit

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \partial_x u = 0.$$

Par suite, en supposant la densité initiale ρ_0 homogène, on voit par dérivation que ρ satisfait la même équation des ondes que u (et T).

1.3 Tuyaux sonores

Pour un fluide, un peu d'intuition physique montre que la tension T est reliée à la pression p par $p = -T/\sigma_0$. D'où,

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} = -\frac{1}{\chi_0} \frac{\delta v}{v_0},$$

où χ_0 est le coefficient de compressibilité (sans dimension), et v le volume. Or dans un tube de section constante,

$$\frac{\delta v}{v_0} = \frac{\delta l}{l_0}.$$

Donc on a une loi analogue à celle de l'élasticité, avec

$$E_0 = \frac{p_0}{\chi_0}.$$

En particulier, pour un gaz parfait adiabatique,

$$p v^\gamma = \text{cte},$$

d'où $\chi_0 = 1/\gamma$ et $E_0 = \gamma p_0$. On trouve comme vitesse de propagation

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\omega_0}}.$$

C'est l'expression bien connue de la vitesse du son.

Application numérique. Dans l'air, assimilé à un gaz di-atomique, on a approximativement $\gamma = 7/5$ (on obtient ce nombre en raisonnant sur le nombre n de degrés de liberté des molécules; de façon générale, $\gamma = (5 + n)/(3 + n)$). La loi des gaz parfaits

$$p = \frac{\omega RT}{M}, \quad R = 8,3144 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}, \quad M = 28,8.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1},$$

permet de calculer

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \simeq 332 \text{ m.s}^{-1}$$

à une température de 273 K , ce qui correspond très bien à la réalité !

1.4 Approche variationnelle

On peut aussi obtenir l'équation régissant le déplacement d'un matériau élastique monodimensionnel au moyen d'une approche variationnelle, sans distinguer la partie transversale de la partie longitudinale.

On note comme précédemment $w(x, t)$ la position à l'instant t du point initialement situé en $x e_1$, sans rien présager de la direction de $u(x, t) = w(x, t) - x e_1$. Pour simplifier on suppose la densité linéaire du matériau ρ_0 homogène et constante. Considérons l'énergie cinétique globale

$$\mathcal{E}_c(t) := \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L \|\partial_t w(x, t)\|^2 dx.$$

On suppose que l'énergie potentielle dépend, de façon éventuellement non-linéaire, de $\partial_x w$:

$$\mathcal{E}_p(t) := \int_0^L f(\partial_x w) dx,$$

où f est donnée par une loi comportementale, appelée loi de Hooke, et supposée convexe. Par exemple,

$$f(y) = f_0 (\|y\| - a)^2,$$

où $f_0 > 0$ et $a \in]0, 1[$. On définit alors l'intégrale d'action

$$\mathcal{A}[w] := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_c(t) - \mathcal{E}_p(t) dt,$$

que l'on cherche à minimiser à $w(0, t)$, $w(L, t)$, $w(x, t_0)$, $w(x, t_1)$ fixés. Une condition nécessaire est

$$\frac{d}{ds} \mathcal{A}[w + sv] |_{s=0} = 0$$

quel que soit v tel que

$$v(0, t) = v(L, t) = v(x, t_0) = v(x, t_1) = 0.$$

Or on calcule facilement

$$\frac{d}{ds} \mathcal{A}[w + sv] |_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \rho_0 \partial_t w \cdot \partial_t v - df(\partial_x w) \cdot \partial_x v dx dt.$$

En supposant les les fonctions assez régulières et en intégrant par parties on obtient donc

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^L (-\rho_0 \partial_{tt}^2 w + d^2 f(\partial_x w) \cdot \partial_{xx}^2 w) \cdot v dx dt$$

(où par un léger abus de notation on a identifié la forme linéaire $d^2 f(\partial_x w) \cdot \partial_{xx}^2 w$ à un vecteur; on peut aussi définir $d^2 f(\partial_x w)$ comme la matrice Hessienne de f en $\partial_x w$, auquel cas il n'y a pas d'abus de notation). Ceci étant vrai quel que soit v (tel que $v(0, t) = v(L, t) = v(x, t_0) = v(x, t_1) = 0$), on en déduit l'ÉDP non-linéaire du second ordre, dite *équation des ondes non linéaire* :

$$\rho_0 \partial_{tt}^2 w - d^2 f(\partial_x w) \cdot \partial_{xx}^2 w = 0.$$

On voit ici apparaître l'intérêt de supposer f convexe. En effet, on peut déterminer la nature de cette ÉDP d'évolution en étudiant l'ÉDP linéaire obtenue en "gelant les coefficients", c'est-à-dire en regardant $\partial_x w = y$ comme une donnée. D'après le lemme de Schwarz, si f est au moins de classe \mathcal{C}^2 , $d^2 f(y)$ est symétrique donc diagonalisable (dans une base orthonormée). Par conséquent, l'ÉDP

$$\rho_0 \partial_{tt}^2 w - d^2 f(y) \cdot \partial_{xx}^2 w = 0$$

est équivalente à une collection d'équations

$$\partial_{tt}^2 w_j - \lambda_j \partial_{xx}^2 w_j = 0,$$

où $\rho_0 \lambda_j$ sont les valeurs propres de $d^2 f(y)$. Si f n'était pas convexe, l'un des λ_j serait négatif, ce qui donnerait une équation d'évolution *elliptique* !

Dans le cas où w est scalaire, par exemple si l'on suppose le déplacement seulement longitudinal, l'ÉDP non linéaire satisfaite par w s'écrit encore

$$\rho_0 \partial_{tt}^2 w + \partial_x (f'(\partial_x w)) = 0,$$

dont une forme plus courante s'obtient en posant

$$\begin{cases} v = \partial_x w, \\ u = \partial_t w. \end{cases}$$

Les nouvelles inconnues (v, u) satisfont alors le système du premier ordre

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u - \frac{1}{\rho_0} \partial_x f'(v) = 0. \end{cases}$$

Ce système est connu sous le nom de p -système. Il apparaît en élasticité comme on vient de le voir. Mais c'est aussi un modèle d'écoulement de fluide compressible, de pression $p = -\frac{1}{\rho_0} f'$, en formulation Lagrangienne (v représentant alors le volume spécifique du fluide, u sa vitesse, et x la coordonnée Lagrangienne de masse $\{m.l^{-2}\}$). C'est d'ailleurs à cela qu'il doit son nom. Pour revenir à notre ÉDP du second ordre, voyons ce qu'elle donne pour la loi

$$f(y) = f_0 (\|y\| - a)^2.$$

Un petit exercice de calcul différentiel montre que

$$d^2 f(y) \cdot h = 2 f_0 \left(\frac{\|y\| - a}{\|y\|} h + a \frac{(y \cdot h)}{\|y\|^3} y \right).$$

Ainsi, l'ÉDP linéaire avec $y = e_1$ (correspondant précisément à la linéarisation au voisinage de la position de référence $w = x e_1$) :

$$\rho_0 \partial_{tt}^2 w + d^2 f(e_1) \cdot \partial_{xx}^2 w = 0$$

s'écrit encore

$$\partial_{tt}^2 w - A \partial_{xx}^2 w = 0, \quad A = 2 \frac{f_0}{\rho_0} (I - a P),$$

où

$$P = I - e_1 \otimes e_1$$

est simplement la projection orthogonale sur e_1^\perp (on a bien sûr supposé e_1 unitaire). En décomposant

$$w = w_1 + w_2, \quad w_1 \parallel e_1, \quad w_2 \perp e_1,$$

on obtient pour w_1 et w_2 des équations des ondes de vitesses différentes

$$\partial_{tt}^2 w_1 - 2 \frac{f_0}{\rho_0} \partial_{xx}^2 w_1 = 0,$$

$$\partial_{tt}^2 w_2 - 2 \frac{f_0}{\rho_0} (1 - a) \partial_{xx}^2 w_2 = 0.$$

1.5 Termes d'ordre inférieur

À l'équation des ondes de base

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0,$$

on peut ajouter des termes d'ordre inférieur (en nombre de dérivations), prenant en compte certains phénomènes supplémentaires. Dans l'équation

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u + r \partial_t u + k u = 0$$

par exemple, r est un nombre positif $\{t^{-1}\}$ représentant la résistance du milieu ambiant (typiquement, l'air dans le cas de la corde vibrante). On verra au §2.1 qu'il introduit une dissipation d'énergie. Quant au nombre $k \{t^{-2}\}$, il représente l'action d'une tension transversale, comme dans le cas d'un ressort. On verra qu'il revient à ajouter un terme (précisément lié à cette tension transversale !) dans l'énergie potentielle. L'équation avec $r = 0, k > 0$:

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u + k u = 0$$

est connue sous le nom de *Klein-Gordon*. C'est une équation *dispersive*, contrairement à l'équation des ondes ordinaire. En effet, si l'on cherche une solution particulière de la forme $u(x, t) = \exp i(\xi x - \lambda t)$, on trouve la *relation de dispersion* :

$$\lambda^2 - c^2 \xi^2 - k = 0.$$

Lorsque $k = 0$, on trouve $\lambda = \pm c \xi$, ce qui n'est pas surprenant (l'équation des ondes propage l'information à la vitesse c). Mais pour $k > 0$, on trouve

$$\lambda = \pm \sqrt{c^2 \xi^2 + k}.$$

Autrement dit, la vitesse de propagation de l'onde $\exp i(\xi x - \lambda t)$,

$$v := \frac{\lambda}{\xi} = \pm \sqrt{c^2 + k/\xi^2}$$

dépend de sa longueur d'onde $1/\xi$. Cette vitesse de propagation est appelée *vitesse de phase*. Elle est ici différente de la *vitesse de groupe*, définie par

$$v_g = \frac{d\lambda}{d\xi} = \pm \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + k/\xi^2}}.$$

2 Analyse de base

On se limite ici à l'équation des ondes linéaire. L'étude des équations d'ondes non linéaires demande des outils spécifiques, hors du cadre de ces notes.

2.1 Estimations d'énergie

Un bagage minime en mécanique indique que l'énergie totale

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p,$$

\mathcal{E}_c désignant comme au §1.4 l'énergie cinétique et \mathcal{E}_p l'énergie potentielle, doit être conservée au cours du mouvement. On retrouve effectivement cette propriété "à la main", en faisant le petit calcul suivant. Multiplions (scalairement) l'équation

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0$$

par $\partial_t u$ et intégrons en espace. Pour simplifier, on suppose l'équation posée sur toute la droite réelle \mathbb{R} , et la solution suffisamment régulière, tendant suffisamment vite vers 0 à l'infini. On obtient après intégration par parties du second morceau :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\partial_t u\|^2 dx + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{c^2}{2} \|\partial_x u\|^2 dx = 0.$$

Ceci signifie exactement que l'énergie totale $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ est constante, avec

$$\mathcal{E}_c := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\partial_t u\|^2 dx, \quad \mathcal{E}_p := \int_{\mathbb{R}} \frac{c^2}{2} \|\partial_x u\|^2 dx.$$

(Au facteur ρ_0 près, \mathcal{E}_c est analogue à l'énergie cinétique définie au §1.4, et \mathcal{E}_p est l'énergie potentielle correspondant à la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2} c^2 \|y\|^2.)$$

Donc on a

$$\mathcal{E}(T) = \mathcal{E}(0)$$

quel que soit $T \geq 0$. Voyons comment se trouve modifiée cette estimation d'énergie lorsqu'on inclut les termes d'ordre inférieur du §1.5. On trouve en faisant la même opération :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\partial_t u\|^2 dx + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{c^2}{2} \|\partial_x u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} r \|\partial_t u\|^2 dx + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{k}{2} \|u\|^2 dx = 0.$$

Par suite, si $r \geq 0$, on en déduit que l'énergie modifiée de sorte que

$$\mathcal{E}_p = \int_{\mathbb{R}} \frac{c^2}{2} \|\partial_x u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{k}{2} \|u\|^2 dx,$$

est non plus conservée (sauf si $r = 0$) mais décroissante, c'est-à-dire que

$$\mathcal{E}(T) \leq \mathcal{E}(0)$$

quel que soit $T \geq 0$. Ainsi r est à l'origine d'une dissipation d'énergie, tandis que k introduit un terme supplémentaire dans l'énergie potentielle.

2.2 Formules de résolution explicites

L'équation des ondes homogène

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0$$

se résout en fait explicitement. On peut le voir de différentes manières.

La première consiste à remarquer la décomposition de l'opérateur des ondes (appelé aussi D'Alembertien) en

$$\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x).$$

Par suite, pour résoudre

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0$$

il suffit de résoudre successivement

$$(\partial_t - c \partial_x) v = 0,$$

$$(\partial_t + c \partial_x) u = v.$$

Or la première équation est une simple *équation de transport*, dont la solution ne dépend que de $(x + ct)$. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que

$$\frac{d}{dt} v(y - ct, t) = \partial_t v - c \partial_x v = 0,$$

et donc $v(y - ct, t) = v(y, 0)$ quel que soit y . En renversant les notations, on a $v(x, t) = v(x + ct, 0)$ quel que soit x . Notons plus simplement $h(y) = v(y, 0)$. Il faut ensuite résoudre l'équation de transport avec terme source :

$$(\partial_t + c \partial_x) u(x, t) = h(x + ct).$$

La solution générale de l'équation homogène est $u(x, t) = g(x - ct)$ (par le même argument que ci-dessus). De plus, en notant f une primitive de $h/2c$, on a une solution particulière "évidente" $u(x, t) = f(x + ct)$. Finalement, par linéarité, la solution recherchée est de la forme :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Une autre méthode consiste à faire le changement de variables

$$(x, t) \mapsto (y, z) := (x + ct, x - ct).$$

On a

$$\partial_x = \partial_y + \partial_z, \quad \partial_t = c(\partial_y - \partial_z),$$

d'où

$$\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = c^2 ((\partial_y - \partial_z)^2 - (\partial_y + \partial_z)^2) = -2c^2 \partial_{yz}^2.$$

On doit donc résoudre le problème

$$\partial_{yz}^2 \tilde{u} = 0$$

dans les nouvelles variables, dont la solution est évidemment de la forme

$$\tilde{u}(y, z) = f(y) + g(z).$$

2.2.a Problème de Cauchy sur \mathbb{R}

Soit à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Il s'agit d'exprimer les fonctions f et g apparaissant dans la forme générale de la solution en fonction de ϕ et ψ . Les deux équations à satisfaire sont

$$\begin{cases} \phi(x) = f(x) + g(x), \\ \psi(x) = c f'(x) - c g'(x). \end{cases}$$

En dérivant la première, on en déduit

$$\begin{cases} 2c f'(x) = c \phi'(x) + \psi(x), \\ 2c g'(x) = c \phi'(x) - \psi(x), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy + \text{cste}, \\ g(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy + \text{cste}', \end{cases}$$

Finalement, en revenant à l'équation non dérivée $\phi(x) = f(x) + g(x)$, on en déduit

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

Cette formule est appelée *formule de D'Alembert*. Réciproquement, si ϕ est au moins deux fois dérivable, et ψ au moins une fois dérivable, la formule de D'Alembert fournit la solution cherchée.

On peut également résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des ondes avec terme source :

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = f.$$

Là encore diverses méthodes sont possibles. La plus directe consiste à utiliser la *formule de Green*. Étant donné (x_0, t_0) , considérons son "cône" de dépendance, qui est en fait le triangle

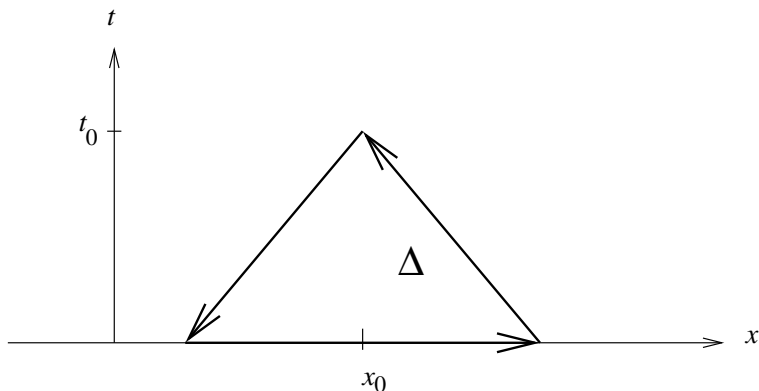
$$\Delta := \{(x, t); x_0 - c(t_0 - t) \leq x \leq x_0 + c(t_0 - t)\}.$$

On a

$$\int_{\Delta} (\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u) = - \int_{\partial\Delta} (\partial_t u dx + c^2 \partial_x u dt).$$

On décompose bien sûr cette intégrale en trois morceaux. L'un vaut simplement

$$\int_{x_0-ct}^{x_0+ct} \psi(y) dy.$$



D'autre part, le long du segment

$$\{(x, t); x = x_0 - c(t - t_0)\},$$

on a

$$\partial_t u \, dx + c^2 \partial_x u \, dt = -c(\partial_t u \, dt + \partial_x u \, dx).$$

Donc l'intégrale correspondante vaut

$$-c(u(x_0, t_0) - \phi(x_0 + ct_0)).$$

De la même façon, l'intégrale restante vaut

$$-c(u(x_0, t_0) - \phi(x_0 - ct_0)).$$

En additionnant, on obtient donc

$$\int_{\Delta} (\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u) \, dx \, dt = \int_{x_0-ct}^{x_0+ct} \psi(y) \, dy - 2cu(x_0, t_0) + c(\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)),$$

d'où la formule

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} (\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)) + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(y) \, dy + \frac{1}{2c} \int_{\Delta} f \, dx \, dt.$$

2.2.b Problème de Dirichlet sur \mathbb{R}^+

La résolution du problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0, & x > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x > 0, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

lorsque ϕ et ψ satisfont les conditions de compatibilité $\phi(0) = 0$ et $\psi(0) = 0$, se ramène à celle du problème de Cauchy par la méthode dite des images. En effet, si u est solution,

alors $(x, t) \mapsto u(-x, t)$ est solution du problème symétrique, posé sur \mathbb{R}^- , avec ϕ et ψ prolongées en des fonctions impaires : $\phi(x) = -\phi(-x)$ et $\psi(x) = -\psi(-x)$. Donc la fonction u définie comme la superposition des deux solutions est une solution sur \mathbb{R} tout entier, sauf peut-être en 0. Réciproquement, soit

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

Cette fonction satisfait l'équation des ondes partout où elle est deux fois dérivable. C'est le cas si ϕ et ψ sont respectivement deux fois et une fois dérivable sur \mathbb{R}^+ , sauf peut-être sur le *cône caractéristique*

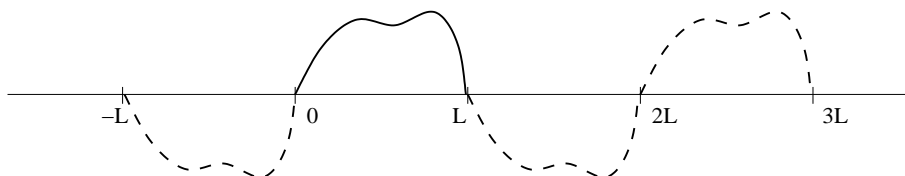
$$\{(x, t); x \pm ct = 0\}.$$

(Si ϕ satisfait la condition de compatibilité supplémentaire $\phi'(0) = 0$, il n'y a pas de problème.) De plus, lorsque ϕ et ψ sont impaires, il en est de même de u . Par conséquent, c'est bien une solution du problème de Dirichlet homogène, sauf peut-être sur la demi-droite $\{x = ct\}$. Lorsque $x > ct$, les fonctions ϕ et ψ sont évaluées en des points positifs. Lorsque $x < ct$, on peut vouloir exprimer $u(x, t)$ à l'aide des fonctions ϕ et ψ originales, définies sur \mathbb{R}^+ . On trouve ainsi la formule

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(ct + x) - \phi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(y) dy.$$

2.2.c Problème de Dirichlet sur un intervalle borné $[0, L]$

La "méthode des images" s'applique comme précédemment : il suffit cette fois de prolonger ϕ et ψ en fonctions impaires et $2L$ -périodiques,



et à nouveau calculer u par la formule de D'Alembert :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

Cela fournit bien une solution de l'équation des ondes, en dehors de

$$\{(x, t); x \pm ct \in L\mathbb{Z}\}.$$

Cette solution est impaire et $2L$ -périodique, donc satisfait les conditions de Dirichlet homogènes en $x = 0$ et $x = L$.

On peut aussi utiliser la méthode de *séparation des variables*, tout aussi classique. On cherche des solutions particulières de la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

ce qui revient à trouver une constante λ telle que

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + c^2 \lambda T = 0.$$

Si λ est négatif, la solution générale de l'équation différentielle du second ordre en $X'' + \lambda X = 0$ est une superposition d'exponentielles, que ne peut satisfaire les conditions de Dirichlet $X(0) = X(L)$. En revanche on trouve des solutions pour

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

proportionnelles à

$$X : x \mapsto \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

La solution T correspondant à cette valeur de λ est de la forme

$$T(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Réciproquement, si les conditions initiales ϕ et ψ admettent des développements en série de Fourier de la forme

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

alors la solution du problème de Dirichlet est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

sous réserve que cette série converge et que l'on puisse dériver deux fois sous le signe somme par rapport à x et t , ce qui demande suffisamment de régularité sur ϕ et ψ .

3 Approximation numérique

3.1 Schéma de base

Une méthode élémentaire de discrétisation de l'équation des ondes est celle des *différences finies*, consistant à remplacer les dérivées exactes par des dérivées approchées discrètes au moyen de la formule de Taylor. En effet, pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 , la formule de Taylor permet d'écrire

$$f''(y) = \frac{f(y+h) - 2f(y) + f(y-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h).$$

Étant donné un pas d'espace Δx et un pas de temps Δt , on cherche à calculer u_j^n , supposé approcher la solution exacte au point (x_j, t^n) , avec $x_{j+1} - x_j = \Delta x$ et $t^{n+1} - t^n = \Delta t$. En appliquant la formule précédente dans la direction du temps et dans la direction de l'espace, et en substituant les approximations ainsi obtenues dans l'équation des ondes

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0,$$

on obtient le schéma centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

3.1.a Ordre

Par construction le schéma centré est d'ordre 1, puisque l'*erreur de troncature*, obtenue en appliquant le schéma à la solution exacte, est

$$\begin{aligned} \frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1}))}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2} \\ = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

3.1.b Stabilité

Il est crucial lorsqu'on souhaite mettre en œuvre un schéma aux différences finies de vérifier, ou plus exactement trouver une condition assurant sa *stabilité*. On dispose pour cela d'un outil très commode pour étudier la stabilité ℓ^2 , la *transformation de Fourier discrète*.

Transformation de Fourier discrète. On sait associer à toute fonction f de carré sommable sur $[-\pi, \pi[$ sa *série de Fourier*, de coefficients

$$c_j := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{ij\omega} d\omega.$$

D'après la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\omega)|^2 d\omega = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2,$$

c'est-à-dire que l'opérateur

$$f \mapsto (c_j)_{j \in \mathbb{Z}}$$

est une isométrie de $L^2([-\pi, \pi[; \frac{d\omega}{2\pi})$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Ce qu'on appelle transformation de Fourier discrète n'est rien d'autre que l'opérateur inverse

$$c = (c_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto \left(f : \omega \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{-ij\omega} \right).$$

(Il y a là un petit abus de notation, puisque la série $\sum c_j e^{-ij\omega}$ n'est pas nécessairement convergente.) On notera \widehat{c} la fonction obtenue par cette transformation. Les deux propriétés que nous utiliserons sont

$$\|\widehat{c}\|_{L^2([-\pi, \pi[; \frac{d\omega}{2\pi})} = \|c\|_{\ell^2(\mathbb{Z})},$$

et, si \mathcal{T} désigne l'opérateur de "shift" :

$$\mathcal{T} : c = (c_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto d = (d_j := c_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}},$$

$$\widehat{\mathcal{T} \cdot c}(\omega) = e^{i\omega} \widehat{c}(\omega).$$

Considérons donc notre schéma centré, réécrit sous la forme équivalente

$$u_j^{n+1} = s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + 2(1-s)u_j^n - u_j^{n-1}, \quad s := c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2},$$

(noter que s est un nombre sans dimension) ou encore, en posant $v_j^n := u_j^{n-1}$:

$$\begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ u_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s) + s(\mathcal{T} + \mathcal{T}^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^n \\ u_j^n \end{pmatrix}.$$

Par transformation de Fourier discrète (en espace seulement !), on obtient

$$\begin{pmatrix} \widehat{v}^{n+1}(\omega) \\ \widehat{u}^{n+1}(\omega) \end{pmatrix} = H(\omega) \begin{pmatrix} \widehat{v}^n(\omega) \\ \widehat{u}^n(\omega) \end{pmatrix},$$

où $H(\omega)$ est ce qu'on appelle la *matrice d'amplification* du schéma. Elle vaut simplement

$$H(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s) + s(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-s(1-\cos\omega)) \end{pmatrix}.$$

Le schéma ci-dessus se résout explicitement en

$$\begin{pmatrix} \widehat{v}^n(\omega) \\ \widehat{u}^n(\omega) \end{pmatrix} = H(\omega)^n \begin{pmatrix} \widehat{v}^0(\omega) \\ \widehat{u}^0(\omega) \end{pmatrix}.$$

On pourra donc contrôler la norme L^2 de la solution à l'itération n en fonction de la norme L^2 initiale si et seulement si la norme de la matrice $H(\omega)^n$ est uniformément bornée (en n et ω). Par la propriété d'isométrie de la transformation de Fourier discrète, ceci fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité ℓ^2 du schéma. Dans l'état, elle n'est cependant pas très exploitable. On n'a pas précisé la norme matricielle à utiliser. En fait, il suffit qu'il en existe une telle que $H(\omega)^n$ soit bornée. Une condition nécessaire pour cela, dite *condition de von Neumann*, est que le rayon spectral de $H(\omega)$ soit inférieur ou égal à 1. Or les valeurs propres de $H(\omega)$ sont les racines de

$$\lambda^2 - 2b(\omega)\lambda + 1 = 0, \quad b(\omega) := 1 - s(1 - \cos\omega).$$

Le produit de ces racines vaut donc 1. Si jamais elles sont réelles, l'une sera nécessairement de valeur absolue supérieure à 1, et la condition de von Neumann sera violée. Il faut donc que le discriminant de cette équation soit négatif (ou nul), c'est-à-dire que $|b(\omega)| \leq 1$ quel que soit ω . Ceci revient à demander $s \leq 1$. Réécrite en fonction de Δ et Δx , cette condition est

$$c\Delta t \leq \Delta x.$$

Ce type de condition, majorant le pas de temps en fonction du pas d'espace, est appelé *condition de Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL en abrégé). Par extension, le nombre sans dimension $c\Delta t/\Delta x$ est souvent appelé *nombre CFL*

⚠ Cependant, cette condition CFL est ici insuffisante pour assurer une borne uniforme de $H(\omega)^n$. Cela serait le cas si $H(\omega)$ était uniformément diagonalisable. Or $H(0)$ ne l'est pas, et la norme de $H(0)^n$ n'est effectivement pas bornée. Elle croît en $\mathcal{O}(n)$, puisqu'on a (par récurrence)

$$H(0)^n = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}.$$

Cette croissance est de loin beaucoup plus modérée que celle, exponentielle, que l'on aurait si H avait une valeur propre de module strictement supérieur à 1. Elle n'exclut pas l'usage du schéma centré, qui donne de bon résultats en pratique, sous la CFL

$$c \Delta t \leq \Delta x .$$

Les meilleurs résultats sont en fait obtenus pour

$$c \Delta t = \Delta x .$$

Voici par exemple un programme Matlab qui utilise ce schéma pour résoudre le problème de Dirichlet, et le problème de Neumann moyennant une petite modification.

Explications	Programme
Nettoyage (facultatif mais conseillé)	<code>clear all</code> <code>close all</code>
Vitesse des ondes	<code>c=1</code>
Longueur	<code>L= 100;</code>
Borne inférieure	<code>xm = 0;</code>
Borne supérieure	<code>xp = xm+L;</code>
Nombre de points	<code>J=500;</code>
Pas d'espace	<code>dx = L/(J-1);</code>
Nœuds du maillage	<code>x=xm:dx:xp;</code>
Condition initiale	<code>umax=1;</code> <code>u0=2.*umax.*(L/2-umax.*abs(x-L./2))./L;</code> <code>umax1=1;</code> <code>u1=2.*umax1.*(L/2-umax1.*abs(x-L./2))./L;</code>
Tracé initial	<code>plot(x,u0,'LineWidth',2)</code> <code>up=max(umax,umax1);</code> <code>axis([xm xp -up up])</code> <code>pause</code>
CFL	<code>cfl = 1;</code> <code>s = cfl^2;</code>
Pas de temps	<code>dt = cfl*dx/c;</code>
Temps de calcul	<code>T = 1000*dt;</code>
Démarrage	<code>temps = 0;</code>
Début de boucle	<code>while temps<T</code> <code>temps = temps+dt;</code> <code>u1past = [u1(1) u1(1:J-1)];</code> <code>u1forwd = [u1(2:J) u1(J)];</code> <code>u = s.*(u1past+u1forwd)+2.*(1-s).*u1-u0;</code>
Bord gauche	<code>u(1)=0;</code>
Bord droit	<code>u(J)=0;</code> <code>u0=u1;</code> <code>u1=u;</code>
Tracé	<code>plot(x,u0,'LineWidth',2)</code> <code>axis([xm xp -up up])</code> <code>drawnow</code>
Fin de boucle	<code>end</code>

Ceci résout le problème de Dirichlet homogène. Pour le problème de Neumann homogène, seules les deux lignes concernant les conditions au bord changent, évidemment. Elles sont simplement remplacées par

```
u(1)=u(2);
u(J)=u(J-1);
```

3.1.c Estimation d'énergie discrète

On peut aussi s'intéresser au comportement du schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

vis à vis de l'énergie du §2.1, et chercher s'il satisfait une estimation d'énergie discrète. Pour cela, on multiplie l'égalité ci-dessus par $(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})$ et on fait la somme sur j . On obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n - (u_j^n - u_j^{n-1})}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^n + u_j^n - u_j^{n-1}) \\ & - c^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n - (u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

d'où, après translation d'indice dans la deuxième somme :

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - (u_j^n - u_j^{n-1})^2}{\Delta t^2} \\ & - c^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)(u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1})}{\Delta x^2} \\ & + c^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)(u_j^{n-1} - u_{j+1}^{n-1})}{\Delta x^2} = 0. \end{aligned}$$

Par suite, on a conservation de l'énergie discrète :

$$\mathcal{E}^{n+1/2} := \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right).$$

Δ L'“énergie potentielle discrète” (c'est-à-dire le deuxième morceau de $\mathcal{E}^{n+1/2}$) n'est pas automatiquement positif, contrairement à l'énergie potentielle exacte.

Termes d'ordre inférieur. Il est facile de discrétiser les termes d'ordre inférieur du §1.5, par exemple en considérant le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + r \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + k u_j^n = 0.$$

Dans ce cas on a une estimation pour l'énergie discrète modifiée :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{n+1/2} & := \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\ & + k \sum_j \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} u_j^n. \end{aligned}$$

En reprenant le calcul précédent, on montre en effet facilement que

$$\mathcal{E}^{n+1/2} - \mathcal{E}^{n-1/2} + r \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2 \Delta t} \right)^2 = 0,$$

et par conséquent

$$\mathcal{E}^{n+1/2} \leq \mathcal{E}^{1/2}$$

quel que soit n .

4 Autres schémas

De nombreux autres schémas peuvent être utilisés, en particulier si l'on réécrit l'équation des ondes sous forme d'un système du premier ordre, en posant $v = \partial_x u$, $w = (1/c) \partial_t u$:

$$\begin{cases} \partial_t v = c \partial_x w, \\ \partial_t w = c \partial_x v. \end{cases}$$

En notant $U = (v, w)^t$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

ce système s'écrit sous forme matricielle

$$\partial_t U = A \partial_x U.$$

\triangle Il faut prendre garde à *ne pas utiliser* le schéma centré qui viendrait naturellement à l'esprit :

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} A (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

car il est *inconditionnellement instable*. La plupart des “bons” schémas proviennent cependant de celui-ci, en le modifiant pour le rendre stable.

La première méthode pour stabiliser un schéma est de le rendre *implicite*. Ici cela donne

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} A (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}),$$

qui s'avère être *inconditionnellement stable*. En contrepartie, il est un peu coûteux, car il nécessite en pratique (lorsqu'on l'implémente) l'inversion d'une matrice. Pour éviter ce problème, on peut se contenter d'“impliciter” une seule des deux équations, ce qui donne après substitution un *schéma explicite à 5 points*, dont on montre qu'il est stable sous la CFL

$$c \Delta t \leq 2 \Delta x.$$

Une autre méthode est de remplacer U_j^n par une valeur moyenne, ce qui donne la classe des schémas de type *Lax-Friedrichs*

$$U_j^{n+1} = \frac{\alpha U_{j+1}^n + \beta U_j^n + \alpha U_{j-1}^n}{2\alpha + \beta} + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} A (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

stables sous la CFL

$$c \Delta t \leq \frac{2\alpha}{2\alpha + \beta} \Delta x.$$

On peut aussi remplacer U_j^n par U_j^{n-1} , et Δt par $2\Delta t$ (car cela revient à approcher $\partial_t U$ par une dérivée discrète centrée), ce qui donne le *schéma saute-mouton* (“leap-frog” en anglais) :

$$U_j^{n+1} = U_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} A (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

Ce schéma est stable sous la CFL

$$c \Delta t \leq \Delta x.$$

Il a l'inconvénient d'être à deux pas, ce qui demande de faire appel à un autre schéma pour calculer U^1 .

Enfin, on peut ajouter un terme au schéma centré, qui le rende à la fois stable et d'ordre 2. C'est ainsi que l'on obtient le *schéma de Lax-Wendroff* :

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} A (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} A^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n).$$

Il est stable sous la CFL

$$c \Delta t \leq \Delta x.$$

Remarque 1 *Pour tous ces schémas, la matrice d'amplification vaut l'identité en $\omega = 0$. Elle ne présente donc pas le même problème que la matrice $H(\omega)$ du §3.1. On peut même montrer qu'elle est uniformément diagonalisable. La condition de von Neumann est par conséquent suffisante pour assurer la stabilité de ces schémas.*

Partie II

L'équation des ondes en dimension supérieure à deux

On appelle *équation des ondes* (linéaire) en dimension d l'ÉDP d'évolution, du second ordre en temps (t) et en espace ($x \in \mathbb{R}^d$),

$$\partial_{tt}^2 u - c^2 \Delta u = 0,$$

où c est un nombre réel positif donné, homogène à une vitesse, et Δ est le Laplacien en espace, défini par

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^d \partial_{x_\alpha x_\alpha}^2 u.$$

En dimension 3, on rencontre cette ÉDP dans divers problèmes physiques, comme en élasticité (où deux vitesses c apparaissent, appelées vitesse de compression et vitesse de cisaillement; elles sont liées aux coefficients de Lamé du matériau), en acoustique (où c est la vitesse du son), en électromagnétisme (où c est la vitesse de la lumière). Les deux premiers exemples généralisent ce qu'on a vu en dimension 1. Le dernier est typiquement multidimensionnel.

L'analyse de l'équation des ondes multidimensionnelle est assez compliquée. On va se contenter de donner l'analogie de la formule de D'Alembert, en dimension 3 d'abord, puis 2. Cela permettra notamment de mettre en évidence le principe d'Huygens :

- en dimension *impaire*, la solution $u(x_0, t_0)$ dépend seulement des conditions initiales $\phi = u(\cdot, 0)$ et $\psi = \partial_t(\cdot, 0)$ sur la sphère

$$\{x; \|x - x_0\| = ct_0\},$$

- en dimension *paire*, la solution $u(x_0, t_0)$ dépend des conditions initiales ϕ et ψ sur la boule

$$\{x; \|x - x_0\| \leq ct_0\}.$$

5 Formules de Kirchhoff

5.1 Problème de Cauchy sur \mathbb{R}^3

Soit à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - c^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

On va utiliser la *méthode des moyennes sphériques*, qui permet de se ramener à un problème en dimension 1, que l'on sait résoudre d'après la première partie. Pour cela on associe à u la fonction de $(r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\bar{u}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u,$$

où S_r est la sphère de rayon r :

$$S_r := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = r\}.$$

Pour obtenir l'équation satisfaite par u , on applique la formule de Green sur la boule

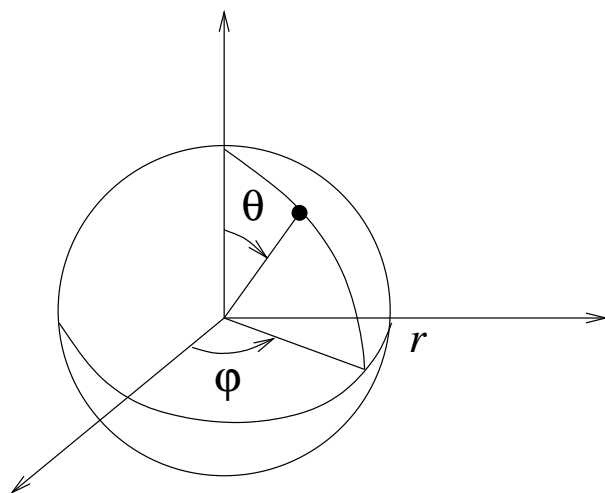
$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq r\},$$

$$\int_{B_r} \Delta u = \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n},$$

où n est le vecteur normal unitaire sur $S_r = \partial B_r$, sortant de B_r . Pour que u soit solution de l'équation des ondes, il faut donc que

$$\int_{B_r} \partial_{tt}^2 u = c^2 \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n}.$$

En utilisant les coordonnées sphériques habituelles



cette égalité s'écrit de façon équivalente :

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_{tt}^2 u \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho = c^2 r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_r u \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Or, par définition,

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

On déduit donc de l'équation précédente :

$$\int_0^r \rho^2 \partial_{tt}^2 \bar{u} \, d\rho = c^2 r^2 \partial_r \bar{u}.$$

D'où, en dérivant une fois par rapport à r :

$$r^2 \partial_{tt}^2 \bar{u} = c^2 \partial_r (r^2 \partial_r \bar{u}),$$

c'est-à-dire

$$\partial_{tt}^2 \bar{u} - c^2 \partial_{rr}^2 \bar{u} - 2 \frac{c^2}{r} \partial_r \bar{u} = 0.$$

(Ceci n'est rien d'autre que l'équation des ondes axisymétrique.) En posant $v := r \bar{u}$, on se ramène à une équation des ondes monodimensionnelle ordinaire :

$$\partial_{tt}^2 v - c^2 \partial_{rr}^2 v = 0.$$

Puisque v doit s'annuler en $r = 0$, cela revient à chercher la solution du problème de Dirichlet dans \mathbb{R}^+ , avec $v(r, 0) = r \bar{\phi}(r)$, $\partial_t v(r, 0) = r \bar{\psi}(r)$ et les notations évidentes

$$\bar{\phi}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} \phi, \quad \bar{\psi}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} \psi.$$

On a une formule explicite pour v :

$$v(r, t) = \frac{1}{2} ((ct+r) \bar{\phi}(ct+r) - (ct-r) \bar{\phi}(ct-r)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) dy, \quad 0 \leq r \leq ct,$$

que l'on peut réécrire

$$v(r, t) = \partial_t \left(\frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\phi}(y) dy \right) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) dy.$$

On récupère ensuite $u(0, t) = \bar{u}(0, t)$ par dérivation, puisque $\bar{u}(0, t) = \partial_r v(0, t)$. Comme

$$\partial_r \left(\frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} y \bar{\psi}(y) dy \right) \Big|_{r=0} = t \bar{\psi}(ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \psi,$$

avec la même formule pour ϕ , on en déduit

$$u(0, t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \phi \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \psi.$$

Bien sûr, on a la même formule lorsqu'on translate 0 en x_0 . Finalement, on a obtenu la formule générale, dite de Kirchhoff :

$$u(x_0, t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|x-x_0\|=ct} \phi \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|x-x_0\|=ct} \psi.$$

5.2 Problème de Cauchy sur \mathbb{R}^2

On va se servir de la formule de Kirchhoff en dimension 3 pour obtenir une formule en dimension 2. Il suffit en effet de résoudre le problème étendu à \mathbb{R}^3 , avec ϕ et ψ indépendantes de la troisième variable $x_3 =: z$! Or, pour une fonction ψ dépendant seulement de $(x_1, x_2) =: (x, y)$, l'intégrale double $\int_{S_r} \psi$ se décompose en

$$\int_{S_r} \psi = 2 \int_{S_r \cap \{z > 0\}} \psi,$$

et la demi-sphère $S_r \cap \{z > 0\}$ est paramétrée par (x, y) :

$$S_r \cap \{z > 0\} = \{(x, y, z); x^2 + y^2 < r \text{ et } z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\},$$

l'élément de surface étant

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

D'où

$$\int_{S_r} \psi = 2r \int_{x^2+y^2 \leq r} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

On en déduit la formule explicite en dimension 2 :

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, t_0) = & \partial_t \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq c^2 t^2} \frac{\phi(x, y)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} dx dy \right) \\ & + \frac{1}{2\pi c} \int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq c^2 t^2} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Index

énergie cinétique, 4
équation des ondes axisymétrique, 23
équation des ondes non linéaire, 5

équation de transport, 9

condition de von Neumann, 15
Courant-Friedrichs-Lewy
 condition de, 15
 nombre de, 15
cône caractéristique, 12
cône de dépendance, 10

D'Alembertien, 9
différences finies, 13
dispersion, 7
dispersion
 relation de, 7
dissipation, 7, 8

erreur de troncature, 14

formule de D'Alembert, 10
formule de Green, 10

Klein-Gordon
 équation de, 7

loi de Hooke, 5

matrice d'amplification, 15
moyenne sphérique, 22
méthode des images, 11

principe d'Huygens, 21

schéma de Lax-Friedrichs, 19
schéma de Lax-Wendroff, 20
schéma implicite, 19
schéma saute-mouton, 20
stabilité, 14
séparation des variables, 12

transformation de Fourier discrète, 14

vitesse de groupe, 7
vitesse de phase, 7

Références

- [1] Laurent Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [2] Walter A. Strauss. *Partial differential equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. An introduction.
- [3] Robert S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [4] Michael E. Taylor. *Partial differential equations. I*, volume 115 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. Basic theory.
- [5] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.