Spectre des opérateurs différentiels

Sylvie Benzoni-Gavage

1^{er} février 2010

Table des matières

1 Motivations

On va s'intéresser aux opérateurs différentiels comme à des opérateurs non-bornés dans un cadre fonctionnel essentiellement hilbertien (espaces de Sobolev). L'étude de leur spectre est motivée par des questions de stabilité dans des phénomèmes d'évolution modélisés par des équations aux dérivées partielles. Prenons par exemple une équation dite de *réaction-diffusion*

$$\partial_t u = \kappa\, \partial^2_{xx} u \,+\, f(u)\,, \tag{1}$$

modélisation l'évolution de la concentration u d'une espèce diffusant avec un coefficient κ et réagissant chimiquement selon une loi donnée par f. Selon les propriétés de f, cette équation peut admettre des solutions particulières que l'on appelle *ondes progressives* (voir [5, 6]). Par définition, une onde progressive de vitesse c est une fonction de la forme $u(t,x) = U(x-ct)$: le graphe de $u(t,\cdot)$ se propage sans se déformer à la vitesse c ; à translation près, c'est celui de la fonction U, que l'on appelle *profil* de l'onde. Dans le référentiel lié à une telle onde, c'est-à-dire en faisant le changement de variables $(t,x) \mapsto (s=t, y=x-ct)$, l'équation (1) devient

$$\partial_s u - c\partial_y u = \kappa\, \partial^2_{yy} u \,+\, f(u)\,. \tag{2}$$

Une onde progressive de profil U est solution de (1) si et seulement si U est une solution stationnaire, c'est-à-dire indépendante de s de (2). Pour étudier sa stabilité on est amené à linéariser (2) autour de U, ce qui conduit à l'équation

$$\partial_s w = c\partial_y w + \kappa\, \partial^2_{yy} w \,+\, f'(U(y))\, w\,,$$

et à étudier le spectre de $A = c\partial_y + \kappa\, \partial^2_{yy} w \,+\, f'(U(y))$, opérateur différentiel à coefficients variables que l'on peut voir comme opérateur non-borné dans un espace approprié de fonctions de $y \in \mathbb{R}$ (ceci sera précisé dans la suite). Au vu des théorèmes classiques ([1, théorème 8.18, p. 273]) pour les équations différentielles ordinaires (ce qui serait le bon cadre si A était borné), on s'attend en effet à de l'instabilité s'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que Re $\lambda > 0$, et à de la stabilité si $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\ \text{Re}\, z < 0\}$.

Remarque 1. *En fait cette inclusion n'est (en général) pas possible à cause de « l'invariance par translation » de* (1)*, impliquant que* 0 *est valeur propre de* A *(dans les espaces « standard ») : en dérivant l'*équation de profil

$$-cU' = \kappa U'' + f(U)\,,$$

on constate en effet que $AU' = 0$*. Donc il faut le plus souvent se contenter de* $\sigma(A)\backslash\{0\} \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\ \textit{Re}\, z < 0\}$*, et montrer ce que l'on appelle de la* stabilité orbitale*, contrôlant non pas* $\|u(t,\cdot) - U)\|$ *mais* $\inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|u(t,\cdot) - U(\cdot+\theta)\|$.

On considère désormais un opérateur différentiel à coefficients variables en dimension 1 :

$$A \,=\, \mathscr{A}(\partial_x) \,=\, \sum_{j=0}^{p} a_j(x)\, \partial_x^j\,,$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a_j(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $a_p(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (de sorte que l'opérateur A est partout d'ordre égal à p). On suppose que pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, $a_j \in \mathscr{C}^\infty_b(\mathbb{R}; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, ce qui signifie que les fonctions a_j sont bornées sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes leurs dérivées. C'est le cas par exemple si A provient d'une linéarisation (comme décrit au paragraphe précédent) autour d'un profil qui est lui-même $\mathscr{C}_b^\infty$. On suppose en outre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|a_p(x)\| \, \|a_p(x)^{-1}\| \geq \alpha$.

On se propose d'étudier le spectre de A, vu comme un *opérateur non-borné* sur $L^2(\mathbb{R})$, de *domaine* l'espace $H^p(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable admettant p dérivées de carré intégrable. Les dérivées sont ici à comprendre au sens des *distributions*, mais nous éviterons d'utiliser (et même de définir) cette notion. Nous allons plutôt définir au prochain paragraphe l'espace de *Sobolev* $H^p(\mathbb{R})$ grâce à la *transformation de Fourier*.

2 Éléments d'analyse fonctionnelle

2.1 Transformation de Fourier

L'analyse de Fourier fait l'objet de nombreux ouvrages (voir par exemple [4] ou [11]). En voici quelques éléments utiles pour la suite.

La *transformation de Fourier* $\mathscr{F}$ est par définition un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (simplement noté $L^2(\mathbb{R})$ dans la suite) tel que, pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathscr{F}u(\xi) \,=\, \int u(x)\, \mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,,$$

$$\mathscr{F}^{-1}u(x) \,=\, \frac{1}{2\pi} \int u(\xi)\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

À un facteur près c'est une isométrie, car en vertu du *théorème de Plancherel* on a pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|\mathscr{F}u\|_{L^2} \,=\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \|u\|_{L^2}\,.$$

La transformation de Fourier laisse invariante la *classe de Schwartz*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) \,=\, \left\{ u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\,;\ \text{quels que soient }\ j\,,\, p \in \mathbb{N}\,,\ \sup_{x\in\mathbb{R}}\, (1+|x|)^p\, |\partial^j u(x)| \,<\, +\infty \right\},$$

ensemble contenant notamment les *gaussiennes*

$$u : x \mapsto \mathrm{e}^{-a(x-m)^2}$$

pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $m \in \mathbb{R}$, de transformées de Fourier

$$\widehat{u} : \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{im\xi}\, \mathrm{e}^{-\xi^2/(4a)}\,.$$

En outre, pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$\mathscr{F}(\partial_x^j u)(\xi) \,=\, (i\,\xi)^j\, \mathscr{F}u(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Si u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, sa transformée de Fourier $\widehat{u}$ se prolonge en une fonction *analytique* sur $\mathbb{C}$. En effet, si $K = \mathrm{supp}(u)$,

$$\widehat{u}(\xi) \,=\, \int_K u(x)\, \mathrm{e}^{-i\,\xi x}\, \mathrm{d}x$$

est défini quel que soit $\xi \in \mathbb{C}$ et hérite de l'analyticité de la fonction exponentielle (car par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut dériver sous le signe $\int$ par rapport à $\mathrm{Re}\,\xi$ et $\mathrm{Im}\,\xi$, et l'on trouve que les dérivées de u satisfont les équations de Cauchy-Riemann). De plus, si $K \subset [-R, R]$, on montre par intégrations par parties successives, l'inégalité

$$|\widehat{u}(\xi)| \,\leq\, \frac{1}{|\xi|^j}\, \|\partial_x^j f\|_{L^1(K)}\, \mathrm{e}^{R\,\mathrm{Im}\xi}\,,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, et $\xi \neq 0$. Il existe donc $C_j > 0$ tel que

$$|\widehat{u}(\xi)| \,\leq\, \frac{C_j}{(1\,+\,|\xi|)^j}\;\; \mathrm{e}^{R\,\mathrm{Im}\xi}$$

quel que soit $\xi \in \mathbb{C}$. Cette propriété caractérise en fait la transformée de Fourier des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support inclus dans $[-R, R]$:

Théorème 1 (Paley–Wiener)**.** *Si U est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe un compact $R > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $C_j \,>\, 0$ avec*

$$|U(\xi)| \,\leq\, \frac{C_j}{(1\,+\,|\xi|)^j}\;\; \mathrm{e}^{R\,Im\xi}$$

pour tout $\xi \,\in\, \mathbb{C}$, alors $U|_{\mathbb{R}}$ est la tranformée de Fourier d'une fonction u de $\mathscr{C}^\infty$ à support compact inclus dans le segment $[-R, R]$.

Voir par exemple [9, p. 16].

2.2 L'espace de Sobolev $H^p(\mathbb{R})$

Pour tout $s \geq 0$, on définit

$$\lambda^s(\xi) \,=\, (1+\xi^2)^{s/2} \quad \text{et} \quad H^s(\mathbb{R}) \,=\, \{\, u \in L^2(\mathbb{R})\,;\; \lambda^s\,\widehat{u} \,\in\, L^2(\mathbb{R}) \,\}\,.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme définie par

$$\|u\|_{H^s} \,=\, \|\lambda^s \widehat{u}\|_{L^2}\,, \quad \widehat{u} := \mathscr{F} u\,.$$

En particulier, d'après le théorème de Plancherel, $H^0(\mathbb{R})$ n'est rien d'autre que $L^2(\mathbb{R})$ (au facteur $\sqrt{2\pi}$ près les normes sont identiques). Pour tout $s \,\geq\, 0$, comme $\lambda^s(\xi) \,\geq\, 1$ quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$, on a une *injection continue* $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est inclus dans $H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s \geq 0$, car si $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors $\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $C_p >$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{u}(\xi)|^2 \,\leq\, \frac{C_p}{(1+|\xi|)^{2p}}\,,$$

ce qui implique $\lambda^s\widehat{u} \,\in\, L^2$ en choisissant $p \,>\, s + 1/2$ (noter que $\lambda^s(\xi)/(1 + |\xi|)^s$ est borné indépendamment de $\xi \in \mathbb{R}$!). Comme $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ contient lui-même l'ensemble $\mathscr{C}_c^\infty$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (voir [2, p. 71]), on en déduit que $H^s(\mathbb{R})$ est *dense* dans $L^2(\mathbb{R})$.

Si $p = s \in \mathbb{N}^*$, la formule (3) montre que la norme sur $H^p(\mathbb{R})$ est équivalente à la norme $\widetilde{\|} \cdot \widetilde{\|}_{H^p}$ définie par

$$\widetilde{\|}\, u \,\widetilde{\|}_{H^p}^2 \;=\; \|u\|_{L^2}^2 \,+\, \sum_{j=1}^{p} \|\partial_x^j u\|_{L^2}^2 \,,$$

et l'inclusion $H^p(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ est stricte.

Enfin on montre que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$ il existe une application continue coïncidant avec u presque partout (voir [2, Théorème VIII.2]).

2.3 Les opérateurs différentiels comme opérateurs non-bornés sur $L^2(\mathbb{R})$

Un opérateur linéaire A d'un sous-espace $\mathscr{D}(A)$ d'un espace de Banach X dans lui-même est appelé (par défaut), *opérateur non-borné*, de *domaine* $\mathscr{D}(A)$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_p \in \mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a_p(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, l'opérateur différentiel

$$A \;=\; \mathscr{A}(\partial_x) \;=\; \sum_{j=0}^{p} a_j(x)\, \partial_x^j \,,$$

peut être vu comme un opérateur non-borné sur $L^2(\mathbb{R})^n$ de domaine $\mathscr{D}(A) = H^p(\mathbb{R})^n$ (dont on rappelle que c'est un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R})^n$). Plus précisément, A définit une application linéaire continue de $H^p(\mathbb{R})^n$ dans $L^2(\mathbb{R})^n$: en effet, pour tout $u \in H^p(\mathbb{R})^n$,

$$\|Au\|_{L^2} \;\leq\; \sqrt{p+1}\, \max_j \|a_j\|_{L^\infty}\, \widetilde{\|}\, u \,\widetilde{\|}_{H^p} \,,$$

où les notations L^2, H^p, L^∞ se rapportent ici aux normes sur $L^2(\mathbb{R})^n$, $H^p(\mathbb{R})^n$, $L^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ respectivement, définies à l'aide d'un norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$ pour les deux premières et de la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour la dernière.

2.3.1 Opérateurs fermés

Définition 1. *Un opérateur non-borné A dans un espace X est* fermé *si son graphe*

$$G_A \;:=\; \{(u, Au)\,;\; u \in \mathscr{D}(A)\}$$

est fermé dans $X \times X$.

Le lemme suivant montre que notre opérateur différentiel A est fermé, c'est-à-dire que son graphe est fermé dans $(L^2(\mathbb{R})^n) \times (L^2(\mathbb{R})^n)$.

Lemme 1. *Si une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H^p(\mathbb{R})^n$ converge vers u dans $L^2(\mathbb{R})^n$ et si Au_m converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})^n$, alors $u \in H^p(\mathbb{R})^n$ et $Au \;=\; f$ (presque partout).*

Démonstration. Le point délicat est de montrer que $u \in H^p(\mathbb{R})^n$, c'est-à-dire que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^p(\mathbb{R})^n$. Ceci repose sur la démonstration d'une estimation :

$$\text{(4)} \qquad \sum_{j=1}^{p} \|\, \partial_x^j v \,\|_{L^2}^2 \;\leq\; C\, (\, \|\, v \,\|_{L^2}^2 \,+\, \|\, Av \,\|_{L^2}^2\,) \,,$$

valable quel que soit $v \in H^p(\mathbb{R})^n$, avec $C > 0$ indépendant de v évidemment. Si l'on admet momentanément (4), alors en l'appliquant à $v = u_k - u_m$ et en faisant tendre k et m vers $+\infty$, on en déduit bien que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente, dans $H^p(\mathbb{R})^n$.

La fin de la démonstration du lemme découle alors du raisonnement classique suivant. Pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a par intégrations par parties,

$$\int \varphi(x)^*(Au_m)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{j=0}^{p}(-1)^j \int \partial_x^j(\varphi^* a_j)(x)\,u_m(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Par hypothèse, Au_m converge vers f dans L^2 donc par l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans L^2, le membre de gauche converge vers $\int \varphi(x)^* f(x)\,\mathrm{d}x$, et de la même façon, puisque u_m converge vers u dans L^2, le membre de droite tend vers $\sum_{j=0}^{p}(-1)^j \int u(x)\,\partial_x^j(\varphi^* a_j)(x)\,\mathrm{d}x$. Or sachant que u appartient à $H^p(\mathbb{R})^n$ on peut intégrer par parties dans l'autre sens, ce qui donne par unicité de la limite (des suites numériques !)

$$\int \varphi(x)^* f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int \varphi(x)^*(Au)(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ceci étant vrai quel que soit φ, le *lemme fondamental du calcul intégral* [2, Lemme IV.2] implique l'égalité des fonctions f et Au presque partout. $\square$

Démonstration de l'estimation (4). Elle est élémentaire mais assez technique lorsque p est grand (noter que le cas $p = 1$ est trivial ; le cas $p = 2$ est facile ; à partir de $p = 3$ c'est presque aussi fastidieux que dans le cas général). Pour simplifier, on suppose $a_p \equiv I_n$ (ce qui revient à remplacer $a_j(x)$ par $(a_p(x))^{-1}\,a_j(x)$). Autrement dit, $A = \partial_x^p + \widetilde{A}$ avec $\widetilde{A}$ d'ordre inférieur ou égal à $p-1$. Pour commencer, on observe que

$$\|\,\partial_x^p v\,\|_{L^2}^2 \;=\; \|\,(A-\widetilde{A})\,v\,\|_{L^2}^2 \;\le\; 2\,\|\,A\,v\,\|_{L^2}^2 + 2\,\|\,\widetilde{A}\,v\,\|_{L^2}^2 \;\le\; 2\,\|\,A\,v\,\|_{L^2}^2 + C\sum_{j=0}^{p-1}\|\,\partial_x^j v\,\|_{L^2}^2\,,$$

où $C > 0$ dépend seulement de p et de $\max_j \|a_j\|_{L^\infty}$. Il suffirait donc de prouver (4) en limitant la somme à $j = p-1$. En fait, on va le faire modulo un terme en $\|\,\partial_x^p v\,\|_{L^2}^2$ qui pourra être absorbé à gauche *in fine*.

Le calcul repose essentiellement sur des intégrations par parties et sur l'*inégalité de Young* :

$$|a\,b| \;\le\; \varepsilon a^2 + C_\varepsilon\,b^2\,,$$

avec $C_\varepsilon = 1/(4\varepsilon)$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

• Cas des « petits entiers » j : si $2j \le p$, en intégrant par parties j fois, on montre grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz que

$$\|\,\partial_x^j v\,\|_{L^2}^2 \;\le\; \|\,\partial_x^{2j} v\,\|_{L^2}\,\|\,v\,\|_{L^2}\,.$$

En itérant au besoin le procédé et en utilisant l'inégalité de Young, on arrive à la majoration

$$\|\,\partial_x^j v\,\|_{L^2}^2 \;\le\; \varepsilon\,\|\,\partial_x^{K_j} v\,\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon\,\|\,v\,\|_{L^2}^2$$

avec $2\,K_j > p$ et pour un $\varepsilon > 0$ à fixer ultérieurement.

• Cas des « grands entiers » j : si $2k > p$, en intégrant par parties $(p-k)$ fois, on montre grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz que

$$\| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 \leq \| \partial_x^p v \|_{L^2} \| \partial_x^{2k-p} v \|_{L^2} \leq \eta \| \partial_x^p v \|_{L^2}^2 + C_\eta \| \partial_x^{2k-p} v \|_{L^2}^2 .$$

En itérant au besoin le procédé (c'est-à-dire en appliquant le même argument à $2k-p$ au lieu de k), on arrive à une majoration

$$\| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 \leq \eta \| \partial_x^p v \|_{L^2}^2 + C_\eta \| \partial_x^{J_k} v \|_{L^2}^2$$

avec $2\, J_k \leq p$ et pour un $\eta > 0$ à fixer.

• En combinant avec l'inégalité obtenue pour les entiers $j \leq p/2$, on a donc d'une part,

$$\| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 \leq \eta \| \partial_x^p v \|_{L^2}^2 + \varepsilon\, C_\eta \| \partial_x^{K_{J_k}} v \|_{L^2}^2 + C_\eta\, C_\varepsilon \| v \|_{L^2}^2 ,$$

d'où en sommant :

$$\sum_{p/2<k\leq p} \| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 \leq \frac{p}{2} \Big(\eta \| \partial_x^p v \|_{L^2}^2 + \varepsilon\, C_\eta \sum_{p/2<k\leq p} \| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 + C_\eta\, C_\varepsilon \| v \|_{L^2}^2 \Big) ,$$

et d'autre part,

$$\| \partial_x^j v \|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \Big(\eta \| \partial_x^p v \|_{L^2}^2 + \varepsilon\, C_\eta \| \partial_x^{K_{J_k}} v \|_{L^2}^2 + C_\eta\, C_\varepsilon \| v \|_{L^2}^2 \Big) + C_\varepsilon \| v \|_{L^2}^2 ,$$

d'où en sommant :

$$\sum_{0\leq j\leq p/2} \| \partial_x^j v \|_{L^2}^2 \leq \frac{p+1}{2} \Big(\varepsilon\, \eta \| \partial_x^p v \|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\, C_\eta \sum_{p/2<k\leq p} \| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 + \varepsilon\, C_\eta\, C_\varepsilon \| v \|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \| v \|_{L^2}^2 \Big) .$$

• En faisant la somme des estimations de $\| \partial_x^p v \|_{L^2}^2$, $\sum_{p/2<k\leq p} \| \partial_x^k v \|_{L^2}^2$ et $\sum_{0\leq j\leq p/2} \| \partial_x^j v \|_{L^2}^2$, on en déduit :

$$\sum_{\ell=0}^{p} \| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 \leq 2 \| A\, v \|_{L^2}^2 + 2\, C \sum_{j=0}^{p-1} \| \partial_x^j v \|_{L^2}^2$$

$$\leq 2 \| A\, v \|_{L^2}^2 + (p+1)\ (1+\varepsilon)\, C \Big(\eta \| \partial_x^p v \|_{L^2}^2 + \varepsilon\, C_\eta \sum_{p/2<k\leq p} \| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 + (C_\eta + 1)\, C_\varepsilon \| v \|_{L^2}^2 \Big) .$$

Il suffit maintenant de choisir $\eta > 0$ tel que $(p+1)\, C\, \eta \leq 1/4$, puis $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $(p+1)\, C\, C_\eta\, \varepsilon \leq 1/4$ pour finalement obtenir

$$\sum_{\ell=0}^{p} \| \partial_x^k v \|_{L^2}^2 \leq 4 \| A\, v \|_{L^2}^2 + 4\, (p+1)\, C\, (C_\eta + 1)\, C_\varepsilon \| v \|_{L^2}^2 .$$

□

Rappelons (voir par exemple dans [2, p. 20]) le

Théorème 2 (du graphe fermé)**.** *Si A est un opérateur linéaire fermé d'un espace de Banach Y dans un espace de Banach X, alors il est continu, c'est-à-dire que $A \in \mathscr{L}(Y; X)$ (avec la notation utilisée plus haut dans cet ouvrage).*

Ce théorème implique en particulier que tout opérateur non-borné fermé A est continu sur son domaine $Y = \mathscr{D}(A)$, comme on l'a vu pour l'opérateur différentiel qui nous intéresse : A est continu de $H^p(\mathbb{R})^n$ vers $L^2(\mathbb{R})^n$; mais A n'évidemment pas continu sur $L^2(\mathbb{R})^n$ (pour $u \in L^2(\mathbb{R})^n$, Au n'est a priori défini qu'au sens des distributions, et n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})^n$ en général).

D'après le théorème du graphe fermé, un opérateur non-borné, fermé, de domaine égal à X tout entier est un opérateur continu sur X, c'est-à-dire un élément de $\mathscr{L}(X)$ avec notre notation habituelle. L'application de ce résultat aux résolvantes d'opérateurs non-bornés fermés est à la base de leur analyse spectrale, comme on le verra au paragraphe 3.

On notera que dans un espace X de dimension finie, tous les opérateurs « non-bornés » sont continus (on dit aussi bornés, ce qui n'est pas très heureux !).

2.3.2 Dualité dans les espaces de Hilbert

Définition 2. *Soit A un opérateur non-borné à domaine dense dans un espace de Hilbert H. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans H. Par le théorème de* représentation de Riesz *([2, p. 61]), il existe un unique opérateur non-borné, appelé* adjoint *de A et noté A^* tel que,*

$$\mathscr{D}(A^*) = \{v \in H\,;\ \exists c \geq 0\,,\ \forall u \in \mathscr{D}(A)\,,\ |\langle v, Au \rangle| \leq c\,\|u\|_H\}\,,$$

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle\,, \quad \forall v \in \mathscr{D}(A^*)\,,\ u \in \mathscr{D}(A)\,.$$

On dit qu'un opérateur A est auto-adjoint *s'il coïncide avec son adjoint : ceci demande que A^* ait le même domaine que A* et *que A soit* symétrique*, c'est-à-dire que pour tout $(v, u) \in \mathscr{D}(A)^2$, $\langle v, Au \rangle = \langle Av, u \rangle$.*

Dans le cas de l'opérateur différentiel $A = \sum_{j=0}^{p} a_j(x)\, \partial_x^j$ avec $H = L^2(\mathbb{R})^n$, les intégrations par parties effectuées dans la démonstration du lemme 1 et le théorème de représentation de Riesz montrent que $\mathscr{D}(A^*) = H^p(\mathbb{R})^n$ et que pour tout $v \in \mathscr{D}(A^*)$,

$$A^* = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j\, \partial_x^j (a_j(x)^* v(x))\,.$$

En général, A n'est pas auto-adjoint, car pas symétrique. Il l'est si ses coefficients sont constants (c'est-à-dire si les applications a_j sont constantes), s'il ne comporte que des dérivées d'ordre pair, et si les matrices a_j sont auto-adjointes (c'est-à-dire $a_j^* = a_j$).

Proposition 1 (voir [2, pp. 28-29])**.** *Si A est un opérateur fermé à domaine dense dans un espace de Hilbert, alors on a les relations suivantes entre son noyau*

$$\text{Ker } A := \{u \in \mathscr{D}(A)\,;\ Au = 0\}\,,$$

celui de son adjoint A^*, son image

$$\text{Im } A := \{Au\,;\ u \in \mathscr{D}(A)\}\,,$$

et celle de son adjoint :

$$\text{Ker } A = (\text{Im } A^*)^\perp\,, \quad \text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp\,, \quad (\text{Ker } A^*)^\perp = \overline{\text{Im } A}\,, \quad (\text{Ker } A)^\perp = \overline{\text{Im } A^*}\,.$$

Ci-dessus, le surlignement signifie l'adhérence, et l'on a utilisé la notation $M^\perp$ pour désigner, lorsque M est un sous-espace de H, le sous-espace orthogonal à M défini par

$$M^\perp := \{v \in H\,;\ \forall u \in M\,,\ \langle v, u \rangle = 0\}\,.$$

(Les trois premières égalités sont en fait vraies pour tout opérateur fermé à domaine dense dans un espace de Banach, et la dernière l'est si cet espace est réflexif, c'est-à-dire isomorphe à son bidual.)

3 Éléments de théorie spectrale

Comme pour les opérateurs continus, le spectre d'un opérateur non-borné fermé est défini comme le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de son ensemble résolvant. Dans tout ce qui suit on note simplement $\lambda - A$ l'opérateur $\lambda \mathrm{Id}_X \, - \, A$, visiblement de même domaine que A.

Définition 3. *Si A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach X et de domaine $Y = \mathscr{D}(A)$, l'*ensemble résolvant *de A est*

$$\rho(A) \, := \, \{ \, \lambda \in \mathbb{C} \, ; \; (\lambda \, - \, A) \; \textit{soit une bijection de } Y \textit{ sur } X \, \} \, .$$

Le spectre *de A est l'ensemble complémentaire de l'ensemble résolvant :*

$$\sigma(A) \, := \, \mathbb{C} \backslash \rho(A) \, .$$

La réciproque d'un opérateur bijectif fermé étant fermée, le théorème du graphe fermé (théorème 2) montre qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans l'ensemble résolvant d'un opérateur fermé A si et seulement si $(\lambda \, - \, A)$ admet un inverse *continu* de X dans X : on appelle alors cet inverse la *résolvante* de A, que l'on notera $R(\lambda) \, := \, (\lambda \, - \, A)^{-1}$. Par définition, pour tout $\lambda \in \rho(A)$, on a $R(\lambda) \in \mathscr{L}(X)$.

Lemme 2. *Le spectre d'un opérateur fermé est une partie fermée de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Vérifions simplement que l'ensemble résolvant d'un opérateur fermé A est ouvert. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\lambda \, - \, A \, = \, (\lambda_0 \, - \, A) \, (\, \mathrm{Id}_X \, + \, (\lambda - \lambda_0) \, R(\lambda_0) \,) \, .$$

Si λ est tel que $|\lambda - \lambda_0| \, < \, \|R(\lambda_0)\|^{-1}$, alors $\mathrm{Id}_X \, + \, (\lambda - \lambda_0) \, R(\lambda_0)$ est inversible (d'inverse donné par $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \, (\lambda - \lambda_0)^m \, R(\lambda_0)^m$), et donc $\lambda \, - \, A$ l'est aussi :

$$R(\lambda) \, = \, (\, \mathrm{Id}_X \, + \, (\lambda - \lambda_0) \, R(\lambda_0) \,)^{-1} \, R(\lambda_0) \, .$$

□

Mais contrairement à ce que l'on sait pour les opérateurs continus, le spectre d'un opérateur fermé peut être vide, ou non-borné, voire égal à $\mathbb{C}$ tout entier. On obtient des contre-exemples en considérant par exemple l'opérateur différentiel le plus simple, $A \, = \, \partial_x$, vu comme un opérateur non-borné sur $L^2([a,b])$, avec $-\infty \, < \, a \, < \, b \, < \, +\infty$. Si l'on prend comme domaine $\mathscr{D}(A) \, := \, H^1([a,b])$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $(\lambda \, - \, A) \, u \, = \, f$ n'a certainement pas une solution unique puisque toutes les fonctions $t \, \mapsto \, C \, \mathrm{e}^{\lambda t}$ sont des éléments de $\mathscr{D}(A)$ solutions de $(\lambda \, - \, A) \, u \, = \, 0$. Dans ce cas $\sigma(A) \, = \, \mathbb{C}$. Si l'on restreint le domaine à $\mathscr{D}(A) \, := \, \{ u \in H^1([a,b]) \, ; \; u(a) \, = \, 0 \}$ alors $\sigma(A)$ est vide, car quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $f \in L^2([a,b])$, il existe un unique $u \in \mathscr{D}(A)$ tel que $(\lambda \, - \, A) \, u \, = \, f$: la formule de Duhamel donne en effet

$$u(t) \, = \, - \int_a^t \mathrm{e}^{\lambda \, (t-s)} \, f(s) \, \mathrm{d}s \, .$$

Le spectre se décompose en plusieurs sous-ensembles, selon la (ou les) raison(s) empêchant $(\lambda - A)$ d'être une bijection de $\mathscr{D}(A)$ sur X. Un premier sous-ensemble est celui des valeurs propres.

Définition 4 (Spectre ponctuel)**.** *Le* spectre ponctuel *d'un opérateur linéaire A est constitué des* valeurs propres *de A :*

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} ;\ \mathrm{Ker}\,(\lambda - A) \neq \{0\} \} = \{ \lambda \in \mathbb{C} ;\ \exists u \in \mathscr{D}(A) \backslash \{0\} ,\ (\lambda - A)\, u = 0 \}.$$

Si la notion de valeur propre est simple à comprendre, il n'est pas évident en pratique de localiser les valeurs propres, d'autant plus en dimension infinie ! Ce sera l'objet du paragraphe 5 pour notre opérateur différentiel.

Une difficulté supplémentaire importante en dimension infinie est liée à la notion de spectre essentiel, dont on peut trouver plusieurs définitions dans la littérature, plus ou moins commodes à cerner et plus ou moins stables par perturbation. Celle que nous adoptons ici utilise la notion d'opérateur de Fredholm.

Définition 5 (Fredholm)**.** *Un opérateur non-borné A dans un espace de Banach X est dit de* Fredholm *si*

- *son noyau est de dimension finie,*
- *son image est fermée et de codimension finie dans X (c'est-à-dire qu'elle admet un supplémentaire de dimension finie).*

*L'*indice *de L est alors défini par*

$$\mathrm{ind} A := \mathrm{dim\ Ker}\ A - \mathrm{codim\ Im}\ A\,.$$

Citons quelques propriétés des opérateurs de Fredholm dans les espaces de Hilbert (cas particuliers d'espaces de Banach réflexifs).

Proposition 2. *Soit A un opérateur de Fredholm, fermé et à domaine dense dans un espace de Hilbert H. Alors son adjoint A^* est aussi un opérateur de Fredholm, on a*

$$H = \mathrm{Ker} A \oplus \mathrm{Im}\ A^* = \mathrm{Ker} A^* \oplus \mathrm{Im}\ A\,, \tag{5}$$

et $\mathrm{ind}A = -\,\mathrm{ind}A^*$. *De plus, A est bijectif si et seulement si A^* est bijectif.*

Démonstration. On observe tout d'abord que puisque Im A est fermé, Im A^* l'est aussi (voir [2, p. 29]). Soit alors $(v_1, \ldots, v_p)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker} A$. L'application $P : x \mapsto \sum_{j=1}^{p} \langle v_j, x\rangle\, v_j$ est un projecteur continu sur $\mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Id}_H - P$ est un projecteur continu sur $(\mathrm{Ker} A)^\perp = \mathrm{Im}\ A^*$ d'après la proposition 1. Par ailleurs, $\mathrm{Ker} A^* = (\mathrm{Im}\ A)^\perp$ est en somme directe avec Im A. Puisque Im A est de co-dimension finie, $\mathrm{Ker} A^*$ est donc de dimension finie. Si $(z_1, \ldots, z_q)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker} A^*$, l'application $Q : x \mapsto \sum_{j=1}^{q} \langle z_j, x\rangle\, z_j$ est un projecteur continu sur $\mathrm{Ker} A^*$ et $\mathrm{Id}_H - Q$ est un projecteur continu sur $(\mathrm{Ker} A^*)^\perp = \mathrm{Im}\ A$ d'après la proposition 1. En particulier, (5) montre que $\mathrm{codim\ Im}\ A = \mathrm{dim\ Ker}\ A^*$, $\mathrm{codim\ Im}\ A^* = \mathrm{dim\ Ker}\ A$, d'où le résultat sur les indices. La dernière propriété (fausse pour les opérateurs non bornés en général) est une autre conséquence immédiate de (5). □

Définition 6 (Spectre essentiel)**.** *Le* spectre essentiel *d'un opérateur linéaire fermé est l'ensemble*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} ;\ (\lambda - A) \textit{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0 \}.$$

Avec cette définition (celle adoptée par exemple dans [10]), si un nombre λ n'est ni valeur propre ni dans le spectre essentiel de A, l'opérateur $(\lambda - A)$ est injectif et $\mathrm{Im}\,(\lambda - A) = \overline{\mathrm{Im}\,(\lambda - A)}$ est de co-dimension nulle, donc $(\lambda - A)$ est bijectif. Autrement dit, λ est dans l'ensemble résolvant de A. Par conséquent,

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(A)\,.$$

A priori le spectre ponctuel et le spectre essentiel ne sont cependant pas disjoints : nous en verrons l'illustration plus loin avec des opérateurs différentiels.

Attention, pour certains auteurs (par exemple Henry [7, p. 136]), le spectre essentiel désigne le complémentaire dans le spectre du spectre discret, défini comme suit.

Définition 7 (Spectre discret)**.** *On appelle* spectre discret *l'ensemble des valeurs valeurs isolées et de multiplicité finie.*

La définition 6 a le mérite de rendre le spectre essentiel stable par perturbation compacte. On a même une caractérisation complète du spectre essentiel des opérateurs à domaine dense à l'aide de leurs perturbations compactes.

Définition 8. *Un opérateur linéaire K sur un espace de Banach X est dit* compact *si l'image par K de tout ensemble borné X est relativement compact. Dans ce cas, on note $K \in \mathscr{K}(X)$.*

Lemme 3 (voir [8, pp. 238–239])**.** *Si A est un opérateur de Fredholm, si K est un opérateur compact, alors $A + K$ est un opérateur de Fredholm de même indice.*

Théorème 3. *Si A est un opérateur linéaire fermé et à domaine dense dans X, alors pour tout $K \in \mathscr{K}(X)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(A + K) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. De plus, on a*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \bigcap_{K \in \mathscr{K}(X)} \sigma(A + K)\,.$$

Démonstration. La première partie, c'est-à-dire l'invariance du spectre essentiel par perturbation compacte, se déduit du lemme 3 : si $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, alors $(\lambda - A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 et donc $(\lambda - A - K)$ aussi, quel que soit l'opérateur compact K. Donc on a déjà

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \bigcap_{K \in \mathscr{K}(X)} \sigma_{\mathrm{ess}}(A + K) \subset \bigcap_{K \in \mathscr{K}(X)} \sigma(A + K)\,.$$

On veut ensuite montrer que si $\lambda \in \bigcap_{K \in \mathscr{K}(X)} \sigma(A + K)$ alors $(\lambda - A)$ ne peut pas être un opérateur de Fredholm d'indice 0. On raisonne par l'absurde : en supposant que $(\lambda - A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 on va montrer qu'il existe un opérateur compact K tel que $\lambda - A - K$ est inversible, c'est-à-dire que λ est dans l'ensemble résolvant de $A + K$. Dans la suite, on suppose sans perte de généralité $\lambda = 0$ (ce qui revient à remplacer $\lambda - A$ par $-A$). Pour simplifier la présentation, on suppose de plus que X est un espace de Hilbert, mais la démonstration s'adapte sans problème aux espaces de Banach (voir [10, p. ?]). D'après la proposition 2, si A est un opérateur de Fredholm, fermé à domaine dense, $\mathrm{Ker}\,A$ et $\mathrm{Ker}\,A^*$ sont de dimension finie. Si de plus A est d'indice 0, ces dimensions sont égales. Soient alors $p := \dim \mathrm{Ker}\,A = \dim \mathrm{Ker}\,A^*$, $(v_1, \ldots, v_p)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\,A$, et $(z_1, \ldots, z_p)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\,A^*$. Considérons l'opérateur $K : x \mapsto Kx := \sum_{j=1}^{p} \langle v_j \cdot x \rangle\, z_j$. Il est borné (de inférieure à p) et de rang fini donc compact. Donc d'après le lemme 3, $(A + K)$

est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Si l'on montre qu'il est injectif, on pourra en déduire qu'il est bijectif et donc que $0 \in \rho(A+K)$.

Si $u \in \mathscr{D}(A)$ est tel que $(A+K)\,u \,=\, 0$ alors $K\,u \,\in$ Im $A \cap$ Ker A^*, donc (d'après (5)) $K\,u \,=\, 0 \,=\, A\,u$. Ceci montre d'une part que $u \,\in$ Ker A et d'autre part que $\langle v_j\,,\,u\,\rangle \,=\, 0$ pour tout j, c'est-à-dire que $u \in (\text{Ker } A)^\perp$ puisque $(v_1,\ldots,v_p)$ est une base de Ker A. par suite $u \,=\, 0$. □

4 Spectre essentiel des opérateurs différentiels

Revenons maintenant à notre opérateur différentiel A. On suppose désormais que les coefficients a_j admettent des limites à l'infini. Il va s'avérer que le spectre essentiel de A est « essentiellement » déterminé par le spectre des opérateurs à coefficients constants $a_j^\pm$ obtenus en passant à la limite dans $a_j(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. Avant de préciser ce résultat, voyons justement le cas des opérateurs à coefficients constants.

4.1 Spectre des opérateurs différentiels à coefficients constants

Théorème 4. *Soit*

$$A \,=\, \mathscr{A}(\partial_x) \,=\, \sum_{j=0}^{p} a_j\,\partial_x^j$$

un opérateur différentiel à coefficients constants matriciels $a_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors le spectre de A sur $L^2(\mathbb{R})$ est constitué exclusivement de spectre essentiel, et plus précisément,

$$\sigma(A) \,=\, \{\,\lambda \in \mathbb{C}\,;\; \exists \xi \in \mathbb{R}\,,\; \text{dét}\,(\lambda \,-\, \mathscr{A}(i\xi)\,) \,=\, 0\,\}\,, \quad \textit{où}\;\; \mathscr{A}(\mu) \,:=\, \sum_{j=0}^{p} \mu^j\,a_j$$

est le symbole *de A (pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $\mathscr{A}(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).*

Démonstration. La recherche du spectre de A revient à l'étude de léquation

$$(\lambda \,-\, A)\,u \,=\, f$$

avec $f \,\in\, L^2(\mathbb{R})^n$ donné. L'outil principal pour cela est la transformation de Fourier. En effet, pour f et u dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})^n$, l'équation ci-dessus est équivalente à

$$(\,\lambda \,-\, \mathscr{A}(i\xi)\,)\,\widehat{u}(\xi) \,=\, \widehat{f}(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Supposons que la matrice $(\,\lambda \,-\, \mathscr{A}(i\xi)\,)$ soit inversible quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$. On en déduit

$$\widehat{u}(\xi) \,=\, (\,\lambda \,-\, \mathscr{A}(i\xi)\,)^{-1}\,\widehat{f}(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Or si l'on note $g(\xi) = (\,\lambda \,-\, \mathscr{A}(i\xi)\,)^{-1}$, la fonction $\xi \mapsto\, |\xi|^p\; g(\xi)$ est bornée : en effet, g est continue comme composée de $\xi \mapsto \lambda \,-\, \mathscr{A}(i\xi)$ et de $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto M^{-1}$, donc bornée sur tout intervalle fermé $[-R,R]$, et $\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|^p\; g(\xi) \;=\; -(i\xi/|\xi|)^{-p}\,a_p^{-1}$. Donc g est de carré intégrable, et par transformation de Fourier inverse on obtient

$$u \,=\, \mathscr{F}^{-1}(g) * f\,.$$

Ce calcul s'étend à toutes les fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})^n$, et la formule $\widehat{u} = g\widehat{f}$ montre de plus que $u \in H^p(\mathbb{R})^n$ puisque $\xi \mapsto |\xi|^p\, g(\xi)$ est bornée.

Autrement dit, si $(\,\lambda - \mathscr{A}(i\xi)\,)$ est inversible quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$, l'équation $(\lambda - A)\,u = f$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})^n$ admet une solution unique $u \in H^p(\mathbb{R})^n$. Ceci montre que

$$\sigma(A) \subset \{\,\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \exists\xi \in \mathbb{R}\,,\ \text{dét}\,(\lambda - \mathscr{A}(i\xi)\,) = 0\,\}\,.$$

Inversement, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ sont tels que $\text{dét}\,(\lambda - \mathscr{A}(i\xi)\,) = 0$ alors $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$. Ceci n'est pas tout à fait immédiat. Supposons en effet $r \in \text{Ker}\,(\,\lambda - \mathscr{A}(i\xi)\,)\backslash\{0\}$. La fonction $U_r\,:\,x \mapsto \mathrm{e}^{i\,\xi\,x}\,r$ annule clairement $(\lambda - A)$, mais elle n'est pas dans le domaine de A (elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, mais même pas de carré intégrable !). C'est pourquoi on ne peut pas dire que λ est une valeur propre de A. Pour montrer qu'elle appartient à $\sigma_{\text{ess}}(A)$ on va faire appel au résultat général suivant :

Lemme 4. *Si A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Hilbert H s'il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$* orthonormée *d'éléments de $\mathscr{D}(A)$ telle que $(\lambda - A)\,u_k$ tende vers 0, alors $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$.*

Admettons ce lemme provisoirement et finissons la preuve du théorème 4. Pour cela, considérons une fonction $\varphi \geq 0$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ valant 1 sur $[0,1]$ et 0 sur $[2,+\infty[$, et définissons pour tout $k \geq 1$,

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x \pm 2k^2| \leq k\,, \\ \varphi(|x \pm 2k^2| - k + 1) & \text{si } k \leq |x \pm 2k^2| \leq k + 1\,, \\ 0 & \text{si } |x \pm 2k^2| \geq k + 1\,. \end{cases}$$

Sous son apparence compliquée, la fonction φ_k a les propriétés intéressantes suivantes : 1) elle est à support compact, de taille en $\mathscr{O}(k)$, tandis que le support de toutes ses dérivées est de taille $\mathscr{O}(1)$; 2) elle est bornée ainsi que toutes ses dérivées uniformément par rapport à k ; 3) les supports de φ_k et $\varphi_{k'}$ sont disjoints pour $k \neq k'$. Comme $(\lambda - A)\,U_r = 0$ et U_r est bornée ainsi que toutes ses dérivées, d'après 1) et 2) la norme L^2 de $(\lambda - A)\,(\varphi_k\,U_r)$ est uniformément bornée par rapport à k. D'autre part, puisque U_r est de module constant, la norme L^2 de $\varphi_k\,U_r$ est en $\mathscr{O}(k^{1/2})$. Par conséquent, $u_k = \varphi_k\,U_r/\|\varphi_k\,U_r\|_{L^2}$ vérifie les hypothèses du lemme 4 : c'est une famille orthonormée dans L^2 (d'après 3)) telle que $(\lambda - A)\,u_k$ tende vers 0. $\square$

Démonstration du lemme 4 : D'après le théorème 3, il suffit de montrer que $\lambda \in \sigma(A+K)$ quel que soit l'opérateur compact K. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un opérateur compact K tel que $\lambda \in \rho(A + K)$. Cela signifie que $(A + K - \lambda)^{-1}$ est un opérateur borné, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\| \leq C\,\|(A + K - \lambda)u\|$$

pour tout $u \in \mathscr{D}(A)$. Puisque (u_k) est bornée par hypothèse, la suite (Ku_k) admet une sous-suite convergente $(Ku_{k'})$. Par suite,

$$\|u_{k'} - u_{m'}\| \leq C\,\|(A + K - \lambda)(u_{k'} - u_{m'})\|$$

$$\leq C\,\|K(u_{k'} - u_{m'})\| + C\,\|(\lambda - A)u_{k'}\| + C\,\|(\lambda - A)u_{m'}\|\,,$$

où les 3 termes tendent vers 0 lorsque $k', m' \to +\infty$. Ainsi la suite $(u_{k'})$ est de Cauchy et donc converge. Or puisque (u_k) est orthonormée, $\|u_{k'} - u_{m'}\|^2 = \|u_{k'}\|^2 + \|u_{m'}\|^2 = 2$, d'où la contradiction. $\square$

4.2 Fonction de Green des opérateurs différentiels à coefficients constants

Notons δ la *masse de Dirac* en 0, c'est-à-dire la *mesure de Radon* définie par $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ pour toute fonction continue φ. Attention, dans ce paragraphe, la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne un crochet de dualité et non un produit scalaire. La transformée de Fourier de δ au sens des distributions est définie par

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle \;=\; \int \varphi(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\,,$$

et s'identifie donc à la fonction constante égale à 1. L'opérateur A étant à coefficients constants, le théorème de *Malgrange–Ehrenpreiss* (voir [3, p. ?]), affirme que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ il existe au moins une distribution G_λ solution de $(\lambda \,-\, A)\, G_\lambda \,=\, \delta$. Mais si de plus λ n'est pas dans le spectre de A, alors G_λ s'identifie avec la fonction de carré intégrable obtenue par transformation de Fourier inverse de la fonction $g_\lambda : \xi \mapsto \,(\,\lambda \,-\, \mathscr{A}(i\xi)\,)^{-1}$: on a en effet par définition

$$(\,\lambda \,-\, \mathscr{A}(i\xi)\,)\, g_\lambda(\xi) \,=\, 1\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,,$$

d'où précisément (en utilisant la formule (3) reliant transformation de Fourier et dérivation)

$$(\lambda \,-\, A)\, \mathscr{F}^{-1}(g_\lambda) \,=\, \delta\,.$$

La fonction $G_\lambda = \mathscr{F}^{-1}(g_\lambda)$ est appelée la *fonction de Green* de l'opérateur $(\lambda - A)$. Cette fonction a une « singularité » en 0 dépendant de l'ordre de l'opérateur A. Plus précisément, puisque la fonction $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{p/2}\, g_\lambda(\xi)$ est bornée, l'inégalité de Cauchy–Schwarz et l'intégrabilité de $\xi \mapsto 1/(1 + |\xi|^2)$ montrent que G_λ appartient à $H^{p-1}(\mathbb{R})$, et s'identifie par conséquent (d'après le résultat rappelé au paragraphe 2.2) à une fonction de classe $\mathscr{C}^{p-2}$ lorsque $p \geq 2$. Dans le cas d'un opérateur A d'ordre 1, G_λ a une discontinuité en 0, comme le montrera la formule de la proposition 3, à laquelle le reste de ce paragraphe est consacré.

Le point de départ pour calculer G_λ est de reformuler l'équation

$$(\lambda \,-\, A)\, u \,=\, f$$

en système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \,=\, \mathbb{A}(\lambda)\, U \,+\, F(x)\,,$$

où

$$F(x) \,:=\, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -(a_p)^{-1}\, f(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}(\lambda) \,:=\, \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & I_n \\ \widetilde{a}_0(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{p-1} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{a}_j \,=\, -\,(a_p)^{-1}\, a_j \quad \forall j \in \{1, \dots, p-1\}\,, \quad \widetilde{a}_0(\lambda) \,=\, -\,(a_p)^{-1}\,(a_0 - \lambda)\,.$$

On est ainsi en quelque sorte ramené au cas $p = 1$, car la fonction de Green $\mathbb{G}_\lambda$ de l'opérateur du premier ordre $\partial_x - \mathbb{A}(\lambda)$ permet de calculer la fonction de Green de $(\lambda - A)$.

Proposition 3. *Soient*

$$A \,=\, \mathscr{A}(\partial_x) \,=\, \sum_{j=0}^{p} a_j\, \partial_x^j$$

un opérateur différentiel à coefficients constants et $\lambda \notin \sigma(A)$. Alors la matrice $\mathbb{A}(\lambda)$ définie comme ci-dessus est hyperbolique*, et la fonction de Green G_λ de $(\lambda - A)$ est donnée par*

$$G_\lambda \,=\, P\, \mathbb{G}_\lambda\, J\,,$$

où $J \,:\, f \in \mathbb{C}^n \,\mapsto\, (0, \cdots, 0, -(a_p)^{-1} f)^t \in \mathbb{C}^{np}\,, \qquad P \,:\, U \in \mathbb{C}^{np} \,\mapsto\, U_1 \in \mathbb{C}^n\,,$ *et*

$$\mathbb{G}_\lambda(x) \,=\, \mathbf{1}_{\{x>0\}}\, \mathrm{e}^{x\,\mathbb{A}(\lambda)}\, \Pi_s(\lambda) \,-\, \mathbf{1}_{\{x<0\}}\, \mathrm{e}^{x\,\mathbb{A}(\lambda)}\, \Pi_u(\lambda)\,,$$

les opérateurs $\Pi_s(\lambda)$ et $\Pi_u(\lambda)$ désignant respectivement les projecteurs (fournis par la proposition **??***, p.* **??***) sur le* sous-espace stable *et le* sous-espace instable *de $\mathbb{A}(\lambda)$. Comme $\mathbb{G}_\lambda$, la fonction de Green G_λ dépend analytiquement de λ, et elle tend exponentiellement vite vers zéro, tout comme ses $(p-1)$ premières dérivées, lorsque x tend vers $\pm\infty$.*

Démonstration. On vérifie d'abord que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le spectre de la matrice $\mathbb{A}(\lambda)$ est égal à

$$\{\mu \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{dét}(\,\lambda \,-\, \mathscr{A}(\mu)\,) \,=\, 0\}\,.$$

En effet, un vecteur $U \in \mathbb{C}^{np}$ est tel que $\mathbb{A}(\lambda)U = \mu U$ si et seulement si U se décompose en p vecteurs $U_1, \ldots, U_p$ de $\mathbb{C}^n$ tels que $\mu U_j \,=\, U_{j+1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ et

$$\mu U_p \,=\, \widetilde{a}_0(\lambda)\, U_1 \,+\, \cdots \,+\, \widetilde{a}_{p-1} U_p\,,$$

ce qui équivaut à $U_{j+1} \,=\, \mu^j U_1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ et

$$(a_p)^{-1}\, (\mathscr{A}(\mu) - \lambda)\, U_1 \,=\, 0\,.$$

Or d'après le théorème 4, $\lambda \notin \sigma(A)$ signifie qu'il n'y a aucun $\mu \in\, i\,\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{dét}(\,\lambda - \mathscr{A}(\mu)\,) \,=\, 0$. C'est donc que la matrice $\mathbb{A}(\lambda)$ n'a pas de spectre imaginaire pur si λ n'est pas dans le spectre de l'opérateur A. Ceci permet de définir le sous-espace stable $E_s(\lambda)$ et le sous-espace instable $E_u(\lambda)$ de $\mathbb{A}(\lambda)$, qui sont alors supplémentaires. De plus, comme $\mathbb{A}$ dépend linéairement, et donc continûment, de λ, ses valeurs propres dépendent aussi continûment de λ (voir par exemple [8, p. 213]). Ainsi, pour λ_0 dans l'ensemble résolvant de A, on peut choisir des contours Γ_- et Γ_+ entourant respectivement toutes les valeurs propres de partie réelle strictement négative et toutes celles de partie réelle strictement positives de $\mathbb{A}(\lambda)$ pour λ voisin de λ_0. Les projecteurs spectraux de $\mathbb{A}(\lambda)$ s'expriment alors (voir [1][théorème 6.20, p. 195]), au moyen des intégrales de contour

$$\Pi_s(\lambda) \,=\, \frac{1}{2\,i\pi} \int_{\Gamma_-} (\,z \,-\, \mathbb{A}(\lambda)\,)^{-1}\, \mathrm{d}z\,, \quad \Pi_u(\lambda) \,=\, \frac{1}{2\,i\pi} \int_{\Gamma_+} (\,z \,-\, \mathbb{A}(\lambda)\,)^{-1}\, \mathrm{d}z\,.$$

Comme $\mathbb{A}$ dépend analytiquement (car linéairement) de λ, on peut en déduire que Π_s et Π_u dépendent analytiquement de λ, et qu'il existe $b(\lambda) \,>$, $\beta(\lambda) \,>\, 0$, $c(\lambda) \,>\, 0$, $\gamma(\lambda) \,>\, 0$, dépendant continûment de λ, tels que

$$\|\, \mathrm{e}^{x\,\mathbb{A}(\lambda)}\, \Pi_s(\lambda)\, \| \,\leq\, b(\lambda)\, \mathrm{e}^{-\beta(\lambda)x}\,, \quad x \in \mathbb{R}^+\,, \quad \|\, \mathrm{e}^{x\,\mathbb{A}(\lambda)}\, \Pi_u(\lambda)\, \| \,\leq\, c(\lambda)\, \mathrm{e}^{\gamma(\lambda)x}\,, \quad x \in \mathbb{R}^-\,.$$

Calculer la fonction de Green $\mathbb{G}_\lambda$ de $\partial_x - \mathbb{A}(\lambda)$ revient à chercher les solutions $U \in L^2(\mathbb{R})^{pn}$ du système $U' = \mathbb{A}(\lambda)\, U + F$ avec $F \in L^2(\mathbb{R})^{pn}$. Pour en déduire G_λ on se restreindra ensuite à $F = J(f)$ avec $f \in L^2(\mathbb{R})^n$, où J est l'application définie dans l'énoncé.

Comme la matrice $\mathbb{A}(\lambda)$ est hyperbolique, le système homogène $U' = \mathbb{A}(\lambda)\, U$ n'admet aucune solution de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ (toutes les solutions tendent vers l'infini au moins d'un côté). Donc s'il existe une solution de carré intégrable au problème non homogène, elle est unique. D'autre part, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$U(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{(x-y)\,\mathbb{A}(\lambda)}\; F(y)\;\mathrm{d}y$$

définit une solution du système avec terme source F. Lorsque $F(y) \in E_s(\lambda)$ pour tout y, on peut faire tendre x_0 vers $-\infty$ dans l'expression ci-dessus, et lorsque $F(y) \in E_u(\lambda)$, on peut faire tendre x_0 vers $+\infty$. Plus généralement, on vérifie que

$$U(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{(x-y)\,\mathbb{A}(\lambda)}\;\Pi_s(\lambda)\;F(y)\;\mathrm{d}y \;-\; \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{(x-y)\,\mathbb{A}(\lambda)}\;\Pi_u(\lambda)\;F(y)\;\mathrm{d}y$$

est une solution de $U' = \mathbb{A}(\lambda)\, U + F$. De plus, elle est effectivement de carré intégrable car

$$\|U(x)\| \;\leq\; b\; \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\beta\,(x-y)}\;\|F(y)\|\;\mathrm{d}y \;+\; c\; \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{\gamma\,(x-y)}\;\|F(y)\|\;\mathrm{d}y\,,$$

et le terme de droite est fait de *convolutions* de la fonction de carré intégrable $x \mapsto \|F(x)\|$ avec les fonctions intégrables $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,\mathrm{e}^{-\beta\,x}$ et $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(x)\,\mathrm{e}^{\gamma\,x}$. Or on rappelle (voir par exemple [2, p. 66]) que la convolution d'une fonction intégrable et d'une fonction de carré intégrable donne une fonction de carré intégrable. Autrement dit, *la* solution de carré intégrable de $U' = \mathbb{A}(\lambda)\, U + F$ est $U = \mathbb{G}_\lambda * F$ avec

$$\mathbb{G}_\lambda(x) \;=\; \mathbf{1}_{\{x>0\}}\,\mathrm{e}^{x\,\mathbb{A}(\lambda)}\,\Pi_s(\lambda) \;-\; \mathbf{1}_{\{x<0\}}\,\mathrm{e}^{x\,\mathbb{A}(\lambda)}\,\Pi_u(\lambda)$$

comme annoncé. □

Remarque 2. *Lorsque $p \geq 2$ on peut vérifier autrement, par un argument d'analyse complexe, la décroissance exponentielle de G_λ. En effet, la transformée de Fourier de G_λ est $\xi \mapsto (\,\lambda - \mathscr{A}(i\xi)\,)^{-1}$. Sit K un compact de $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$, il existe $\gamma > 0$ tel que la matrice $(\,\lambda - \mathscr{A}(\mu)\,)$ soit inversible pour tout $\lambda \in K$ et tout μ dans la bande $M_K := \{\mu\,;\; |Re\,\mu| \leq \gamma\}$. De plus, $(\,\lambda - \mathscr{A}(\mu)\,)^{-1}$ dépend analytiquement de μ et*

$$|Im\,\mu|^p\,\|(\,\lambda - \mathscr{A}(\mu)\,)^{-1}\|$$

est uniformément borné pour $(\lambda,\mu) \in K \times M_K$. Si $p \geq 2$, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier et ainsi obtenir l'expression

$$G_\lambda(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ix\xi}(\,\lambda - \mathscr{A}(i\xi)\,)^{-1}\,\mathrm{d}\xi$$

$$=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x(\gamma+i\xi)}(\,\lambda - \mathscr{A}(\gamma+i\xi)\,)^{-1}\,\mathrm{d}\xi \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x(-\gamma+i\xi)}(\,\lambda - \mathscr{A}(-\gamma+i\xi)\,)^{-1}\,\mathrm{d}\xi$$

par la formule de Cauchy. On en déduit les majorations voulues quand $x \to \pm\infty$.

Exemple. Prenons simplement l'opérateur $A = \partial_x^2$. Le spectre de A est $\mathbb{R}^-$, et la fonction de Green de $(\lambda - A)$ pour $\lambda \notin \mathbb{R}^-$ se calcule directement par transformation de Fourier inverse :

$$G_\lambda(x) \,=\, \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\,,$$

où $\sqrt{\lambda}$ désigne la racine carrée de λ de partie réelle strictement positive. En écrivant $(\lambda - A)\,u = f$ sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= v\,, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \lambda\,u \,-\, f\,, \end{aligned}\right.$$

les projecteurs spectraux sont donnés par

$$\Pi_s(\lambda)\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \,=\, \frac{1}{2}\,(\,u \,-\, \frac{v}{\sqrt{\lambda}}\,)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \Pi_u(\lambda)\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \,=\, \frac{1}{2}\,(\,u \,+\, \frac{v}{\sqrt{\lambda}}\,)\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

d'où

$$\mathbb{G}_\lambda(x)\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \,=\, \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{x>0}\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{\lambda}}\,(\,u - \frac{v}{\sqrt{\lambda}}\,)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{x<0}\,\mathrm{e}^{x\sqrt{\lambda}}\,(\,u + \frac{v}{\sqrt{\lambda}}\,)\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

et en particulier

$$P\,\mathbb{G}_\lambda(x)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix} \,=\, \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{e}^{-|x|\sqrt{\lambda}}\,f\,.$$

Noter que le cas limite $\lambda \to 0$ donne $G_0(x) \,=\, -\,|x|/2$, ce qui est connu comme la fonction de Green de ∂_x^2 (le Laplacien en dimension 1 ! en effet, $\partial_x G_0 = -(1/2)\mathrm{sign}$ et $\partial_{xx} G_0 = \delta$ au sens des distributions). Sur cet exemple, on observe bien la décroissance exponentielle de la fonction de Green G_λ tant que λ est en dehors du spectre de l'opérateur, et l'on constate que cette décroissance est perdue dès que λ entre dans le spectre (en 0).

On a donc réglé le cas des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbb{R}$: 1) leur spectre est une réunion de *courbes algébriques*, définies par $\lambda = \omega_k(i\xi)$ si les ω_k désignent les valeurs propres de $\mathscr{A}(\mu)$ pour $\mu \in \mathbb{C}$; 2) il s'agit de spectre essentiel ; 3) en dehors du spectre, leur résolvante s'exprime au moyen d'une fonction de Green exponentiellement décroissante à l'infini.

4.3 Opérateurs à coefficients variables

On revient maintenant à un opérateur

$$A \,=\, \mathscr{A}(\partial_x) \,=\, \sum_{j=0}^{p} a_j(x)\,\partial_x^j$$

dont les coefficients a_j admettent des limites finies en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_j(x) \,=\, a_j^{\pm}\,.$$

On note

$$A^{\pm} = \sum_{j=0}^{p} a_j^{\pm}\, \partial_x^j$$

les opérateurs à coefficients constants associés, et $\mathscr{A}^{\pm}$ leurs symboles.

Proposition 4. *Si $\lambda \in \sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)$ alors $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$.*

Démonstration. Comme pour le théorème 4 (p. 12) dans le cas à coefficients constants, on va utiliser le lemme 4. Supposons pour fixer les idées que $\lambda \in \sigma(A^-)$. Il s'agit de construire une suite orthonormée (u_k) telle que $(\lambda - A)u_k$ tende vers 0.

Soit alors $r^- \in \operatorname{Ker}\,(\,\lambda \,-\, \mathscr{A}^-(\xi)\,)$ et $U^-(x) \,=\, \mathrm{e}^{i\,\xi\,x}\, r^-$. On définit

$$\varphi_k^-(x) \,:=\, \begin{cases} 1 & \text{si } |x + 2k^2| \leq k\,, \\ \varphi(|x+2k^2| - k + 1) & \text{si } k \,\leq\, |x+2k^2| \leq k \,+\, 1\,, \\ 0 & \text{si } |x+2k^2| \geq k \,+\, 1\,. \end{cases}$$

Comme $(\lambda \,-\, A^-)\, U^- \,=\, 0$,

$$(\lambda \,-\, A)\,(\varphi_k^-\, U^-) \,=\, (\lambda \,-\, A^-)\,(\varphi_k^-\, U^-) \,+\, (A^- \,-\, A)\,(\varphi_k^-\, U^-)$$

est uniformément borné par rapport à k. On conclut ensuite comme pour le théorème 4. $\square$

Au prix d'hypothèses supplémentaires sur la convergence des coefficients, on peut en fait montrer l'égalité

$$\sigma(A^-) \cup \sigma(A^+) \,=\, \sigma_{\text{ess}}(A)\,.$$

Théorème 5. *On suppose les coefficients de A tels que :*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \partial_x^k a_j \,=\, \partial_x^k a_j^{\pm} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \partial_x^k a_j \,=\, 0\,, \quad 1 \leq k \leq j \leq p\,.$$

Si $\lambda \notin \sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)$ alors $(\lambda \,-\, A)$ est un opérateur de Fredholm.

On verra plus tard comment calculer l'indice (théorème 6).

Démonstration. Il s'agit à nouveau d'étudier léquation

$$(\lambda - A)u \,=\, f$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R})$, qui est équivalente à

$$\widetilde{A}_\lambda u \,=\, \widetilde{f}\,, \qquad \text{où} \quad \widetilde{f} \,:=\, (a_p)^{-1}\, f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \widetilde{A}_\lambda \,:=\, (a_p)^{-1}\,(\lambda - A)$$

est un opérateur de partie principale ∂_x^p et de coefficients de classe $\mathscr{C}^\infty$ en x et analytiques en λ.

Pour simplifier les notations, on omet le tilde et l'indice λ désormais : on suppose que A est un opérateur différentiel de partie principale ∂_x^p et de coefficients $\mathscr{C}^\infty$ en x et analytiques en un paramètre λ ; on suppose de plus que ces coefficients ont des limites quand $x \to +\infty$ ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre p (en fait l'ordre j suffit pour le coefficient de ∂_x^j), et que les opérateurs obtenus à la limite $A^{\pm}$ ont des symboles $\mathscr{A}^{\pm}$ tels que $\mathscr{A}^{\pm}(i\,\xi) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

On décompose $A - \partial_x^p$ (qui est d'ordre inférieur ou égal à $(p \,-\, 1)$ en trois morceaux : l'un dont les coefficients sont nuls en dehors d'un intervalle borné, et les deux autres dont les coefficients sont nuls sur une demi-droite et « petits » sur l'autre. Afin de conserver des coefficients réguliers, on fait appel à une fonction plateau φ_R, de classe $\mathscr{C}^\infty$, valant 1 dans $[-R, R]$ et 0 en dehors de $]-R-1, R+1[$. Ainsi

$$A - \partial_x^p \,=\, \widetilde{A}_R^0 \,+\, \widetilde{A}_R^+ \,+\, \widetilde{A}_R^-\,, \quad \widetilde{A}_R^0 \,:=\, \varphi_R\,(A - \partial_x^p)\,, \quad \widetilde{A}_R^\pm \,:=\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}\,(1-\varphi_R)\,(A - \partial_x^p)\,.$$

Le nombre R sera choisi ultérieurement pour assurer que les coefficients de $\widetilde{A}_R^\pm$ sont assez petits. On notera dans la suite

$$A_R^\pm \,:=\, \partial_x^p \,+\, \widetilde{A}_R^\pm\,,$$

de sorte que l'opérateur A lui-même se décompose en :

$$A \,=\, A_R^+ \,+\, \widetilde{A}_R^0 \,+\, \widetilde{A}_R^- \,=\, A_R^- \,+\, \widetilde{A}_R^0 \,+\, \widetilde{A}_R^+\,.$$

La démonstration du théorème 5 est assez longue et comporte plusieurs étapes : 1) on construit des fonctions de Green G_R^- et G_R^+ (exponentiellement décroissantes à l'infini ainsi que leurs $(p-1)$ premières dérivées) des opérateurs « presque à coefficients constants » A_R^- et A_R^+ (pour R assez grand) ; 2) on en déduit des estimations ponctuelles *a priori* de u et de ses dérivées en fonction de Au ; 3) on utilise ces estimations pour montrer que le noyau de A, ainsi que celui de l'adjoint A^* (qui est un opérateur différentiel d'ordre p dont les opérateurs limite ont le même spectre que $\mathscr{A}^\pm$: c'est ici qu'intervient l'hypothèse sur la convergence vers zéro des dérivées des coefficients) est de dimension finie (on aura pour cela recours au théorème de *Riesz* disant que si la boule unité d'un espace de Banach compacte alors cet espace est de dimension finie, voir [2, p.92]) ; 4) on utilise aussi les estimations a priori pour montrer que l'image de A est fermée : la codimension finie est alors une conséquence de l'égalité

$$\mathrm{Im}\, A \,=\, (\mathrm{Ker}\, A^*)^\perp\,,$$

valable puisque A est fermé à domaine dense (Proposition 1).

Étape 1. Montrons qu'il existe $G_R^\pm \in \mathscr{C}_b^{p-2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et $C_R^\pm$, $\alpha_R^\pm > 0$ tels que

$$A_R^\pm u \,=\, f \,\in\, L^2(R) \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \,=\, \int_{-\infty}^{+\infty} G_R^\pm(x,y)\, f(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}\,,$$

et pour $j \in \{0, \dots, p-1\}$,

$$\|\partial_x^j G_R^\pm(x,y)\| \,\leq\, C_R^\pm\, \mathrm{e}^{-\alpha_R^\pm\,|x-y|} \quad , \text{ pour tout } x \text{ et tout } y\in\mathbb{R}\,.$$

La démonstration est la même pour A_R^- et A_R^+. Considérons par exemple A_R^+ : les coefficients de cet opérateur sont nuls pour $x \,\leq\, R$ et admettent a_j^+ comme limites en $+\infty$. D'après la proposition 3, l'opérateur limite A^+ admet une fonction de Green G^+, satisfaisant

$$\|\partial_x^j G^+(x,y)\| \,\leq\, C^+\, \mathrm{e}^{-\alpha^+\,|x-y|} \quad , \text{ pour tout } x \text{ et tout } y\in\mathbb{R}\,.$$

Si l'on note $M_R^+ \,=\, A^+ \,-\, A_R^+$ (opérateur d'ordre inférieur ou égal à $(p-1)$) comme A^+ est inversible, on a

$$A_R^+ \,=\, (I \,-\, M_R^+\,(A^+)^{-1})\,A^+$$

d'où, formellement,

$$(A_R^+)^{-1} \,=\, (A^+)^{-1} \,\sum_{k=0}^{+\infty} (M_R^+\,(A^+)^{-1})^k\,,$$

c'est-à-dire

$$((A_R^+)^{-1} f)(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(x-y) \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} (M_R^+ \, (A^+)^{-1})^k f \Big)(y) \, \mathrm{d}y \,.$$

Examinons les termes de la somme infinie ci-dessus. Le premier est simplement $f(y)$. Le second est

$$\big(M_R^+ \, (A^+)^{-1} f\big)(y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} (M_R^+ \, G^+(y-z)) \, f(z) \, \mathrm{d}z \,,$$

où M_R^+ agit sur la variable y. Notons

$$\Gamma_R^1(y,z) \;:=\; M_R^+ \, G^+(y-z)$$

(Attention, la notation dans le membre de droite est trompeuse : ce n'est pas une fonction de $(y-z)$ car les coefficients de l'opérateur différentiel M_R^+ dépendent de y !) On a d'après les estimations sur G^+ et ses dérivées,

$$\|\Gamma_R^1(y,z)\| \;\leq\; C^+ \, \varepsilon_R^+ \, \mathrm{e}^{-\alpha^+ \, |y-z|} \,,$$

où ε_R^+ désigne le maximum des normes des coefficients de M_R^+. Par récurrence, on a de façon analogue

$$\big((M_R^+ \, (A^+)^{-1})^k f\big)(y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_R^k(y,z) \, f(z) \, \mathrm{d}z \,,$$

avec

$$\Gamma_R^k(x,y) \;:=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_R^1(x,z) \; \Gamma_R^{k-1}(z,y) \, \mathrm{d}z \,.$$

Lemme 5. *Avec les notations ci-dessus, si $C^+ \varepsilon_R^+ < \alpha^+/2$ alors*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|\Gamma_R^k(x,y)\| \;\leq\; K(C^+ \varepsilon_R^+, \alpha^+) \; \mathrm{e}^{-\beta(C^+ \varepsilon_R^+, \alpha^+) \, |x-y|} \,,$$

$$\beta(\gamma,\alpha) \;:=\; \sqrt{\alpha\,(\alpha \,-\, 2\,\gamma)} \,, \quad K(\gamma,\alpha) \;:=\; \frac{\gamma\,\alpha}{\beta(\gamma,\alpha)} \,.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi^k(x) \;\leq\; K(\gamma,\alpha) \, \mathrm{e}^{-\beta(\gamma,\alpha)\,|x|}$$

où ψ^k désigne la k-ième convolée de la fonction $x \;\mapsto\; \gamma \; \mathrm{e}^{-\alpha\,|x|}$ avec elle-même, en supposant $\gamma \;<\; \alpha/2$. C'est un petit calcul utilisant la transformée de Fourier. □

Par suite, le calcul formel effectué plus haut se justifie pourvu que R soit choisi assez grand, de sorte que $C^+ \varepsilon_R^+ < \alpha^+/2$. On peut dans ce cas définir la fonction de Green de A_R^+ par

$$G_R^+(x,y) \;=\; G^+(x-y) \;+\; \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(x-z) \, \sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma_R^k(z,y) \, \mathrm{d}z \,.$$

D'après les estimations satisfaites par G^+ et la somme des Γ_R^k, on a

$$\|\partial_x^j G_R^+(x,y)\| \,\leq\, C^+\,\mathrm{e}^{-\alpha^+|x-y|} \,+\, C^+\,K(C^+\varepsilon_R^+,\alpha^+)\,\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^+|x-z|}\,\mathrm{e}^{-\beta(C^+\varepsilon_R^+,\alpha^+)\,|z-y|}\,\mathrm{d}z\,,$$

ce qui, tout calcul fait (voir la petite formule dans l'appendice) et puisque $\beta(C^+\varepsilon_R^+,\alpha^+) \,<\, \alpha^+$, est inférieur à

$$\Big(C^+ \,+\, \frac{\alpha^+}{\varepsilon_R^+\beta(C^+\varepsilon_R^+,\alpha^+)}\Big)\,\mathrm{e}^{-\beta(C^+\varepsilon_R^+,\alpha^+)\,|x-y|}\,.$$

Étape 2. Montrons qu'il existe $C>0$, $C'>0$ et $\alpha>0$ tels que pour tout $u\in H^p(\mathbb{R})$,

(6) $$\|\partial_x^j u(x)\| \,\leq\, C\,\big(\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\,\|u\|_{H^{p-1}} \,+\, \|Au\|_{L^2}\big) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}$$

quel que soit $j\in\{0,\dots,p-1\}$.

L'estimation ponctuelle se fait en deux fois, pour $x\leq 0$ en utilisant la fonction de Green G_R^- et pour $x\geq 0$ en utilisant la fonction de Green G_R^+. Les calculs étant identiques, voyons seulement le cas $x\geq 0$. Pour tout $u\in H^p$ on a

$$A\,u \,=\, f\in L^2 \quad\Leftrightarrow\quad A_R^+\,u \,=\, f \,-\, \widetilde{A}_R^0 u \,-\, \widetilde{A}_R^- u \,\in\, L^2\,,$$

et donc

$$u(x) \,=\, \int_{-\infty}^{+\infty} G_R^+(x,y)\,(\,f \,-\, \widetilde{A}_R^0 u \,-\, \widetilde{A}_R^- u)(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

d'où (par le théorème de convergence dominée)

$$\partial_x^j u(x) \,=\, \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^j G_R^+(x,y)\,(\,f \,-\, \widetilde{A}_R^0 u \,-\, \widetilde{A}_R^- u)(y)\,\mathrm{d}y$$

et d'après l'estimation de $\partial_x^j G_R^+$,

$$\|\partial_x^j u(x)\| \,\leq\, C_R^+\,\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_R^+|x-y|}\,(\,\|f(y)\| \,+\, \|(\widetilde{A}_R^0 u \,+\, \widetilde{A}_R^- u)(y)\|\,)\,\mathrm{d}y\,.$$

Le terme en f se majore simplement par l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Quant à l'autre terme, puisque les coefficients de $(\widetilde{A}_R^0 \,+\, \widetilde{A}_R^-)$ sont nuls sur $[R+1,+\infty[$, il se réduit à

$$\int_{-\infty}^{R+1}\mathrm{e}^{-\alpha_R^+|x-y|}\,\|(\widetilde{A}_R^0 u \,+\, \widetilde{A}_R^- u)(y)\|\,\mathrm{d}y \,\leq\, m_R\,\|u\|_{H^{p-1}}\int_{-\infty}^{R+1}\mathrm{e}^{-\alpha_R^+|x-y|}\,\mathrm{d}y$$

où m_R désigne le maximum des normes des coefficients de $(\widetilde{A}_R^0 \,+\, \widetilde{A}_R^-)$. Pour $x>R+1$, on a

$$\int_{-\infty}^{R+1}\mathrm{e}^{-\alpha_R^+|x-y|}\,\mathrm{d}y \,=\, (\mathrm{e}^{\alpha_R^+(R+1)}/\alpha_R^+)\,\mathrm{e}^{-\alpha_R^+ x}$$

et cette intégrale est uniformément bornée pour $x\in[0,R+1]$, donc il existe $K_R^+>0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{R+1}\mathrm{e}^{-\alpha_R^+|x-y|}\,\mathrm{d}y \,\leq\, K_R^+\,\mathrm{e}^{-\,\alpha_R^+ x}\,.$$

Ceci prouve (6) pour $x\geq 0$, et comme on l'a dit, on traite de façon analogue le cas $x\leq 0$. On en déduit évidemment (6) en prenant $\alpha=\min(\alpha_R^+,\alpha_R^-)$, etc.

Étape 3. Montrons que la boule unité de Ker A est compacte.

Lemme 6. *Si* (u_n) *est une suite bornée dans* H^p *telle que* Au_n *converge vers* 0 *dans* L^2 *alors* (u_n) *admet une sous-suite convergeant dans* H^p *vers* $u \in \mathrm{Ker}\, A$.

Démonstration. Rappelons que pour tout intervalle *borné* $H^p(I)$ s'injecte de façon compacte dans $H^{p-1}(I)$. La méthode pour obtenir des résultats sur $\mathbb{R}$ tout entier est ce qu'on appelle le *procédé diagonal* : pour chaque intervalle $[-r, r]$, la suite $((u_n)_{|[-r,r]})_n$ est bornée dans $H^p([-r, r])$ et donc admet une sous-suite convergente dans $H^{p-1}([-r, r])$; on commence donc par extraire une sous-suite $(u_{\psi_1(n)})$ pour l'intervalle $[-1, 1]$ (avec ψ_1 strictement croissante), puis successivement une sous-suite $(u_{\varphi_r(n)})$ convergente dans $H^{p-1}([-r, r])$ pour tout intervalle $[-r, r]$ et $r \in \mathbb{N}^*$, avec $\varphi_1 = \psi_1$ et $\varphi_{r+1}(n) = \varphi_r(\psi_r(n))$ (avec ψ_r strictement croissante) ; par construction, la limite de $(u_{\varphi_{r+1}(n)})_{|[-r-1,r+1]}$ coïncide avec la limite de $(u_{\varphi_r(n)})_{|[-r,r]}$ sur $[-r, r]$; ceci permet de définir une fonction u sur $\mathbb{R}$ tout entier par

$$u_{|[-r,r]} = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi_r(n)} \,,$$

et un petit exercice montre alors que $n \mapsto \varphi_n(n)$ est strictement croissante et

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{\varphi_n(n)} - u\|_{H^{p-1}([-n,n])} = 0 \,.$$

Ceci n'est bien entendu pas suffisant pour avoir la convergence dans $H^{p-1}(\mathbb{R})$. C'est là qu'entre en jeu l'estimation (6). En effet,

$$\|u_{\varphi_n(n)} - u\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})} \leq \|u_{\varphi_n(n)} - u\|_{H^{p-1}([-n,n])} + \|u_{\varphi_n(n)} - u\|_{H^{p-1}(\mathbb{R}\setminus[-n,n])} \,,$$

où par construction le premier terme tend vers 0 et on voudrait bien montrer que le second tend aussi vers 0. Attention, ne sachant pas que $u \in H^p$, on ne peut pas appliquer directement (6) à $u_{\varphi_n(n)} - u$. On va donc passer par le critère de Cauchy : pour $m \geq n$, on a

$$\|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})} \leq \|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}([-n,n])} + \|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R}\setminus[-n,n])} \,,$$

où le premier terme tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ et d'après (6) le second est majoré par

$$C\left(\|\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R}\setminus[-n,n])} \|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})} + \|A(u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)})\|_{L^2} \right).$$

Comme $\|A(u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)})\|_{L^2}$ d'après l'hypothèse, $\|\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R}\setminus[-n,n])}$ tend aussi vers 0 lorsque $n \to +\infty$, et de plus $\|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})}$ est borné (sinon on pourrait encore l'absorber dans le membre de gauche), on a bien

$$\lim_{m\geq n\to+\infty} \|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})} = 0 \,.$$

Donc la suite $(u_{\varphi_n(n)})$ est convergente dans $H^{p-1}(\mathbb{R})$, et sa limite coïncide nécessairement avec u. Ceci montre déjà que u appartient à $H^{p-1}(\mathbb{R})$. Enfin, comme $\partial_x^p u_{\varphi_n(n)}$ tend vers $\partial_x^p u$ au sens des distributions et

$$\partial_x^p u_{\varphi_n(n)} = A u_{\varphi_n(n)} - \sum_{j=0}^{p-1} a_j\, \partial_x^j u_{\varphi_n(n)} \to \sum_{j=0}^{p-1} a_j\, \partial_x^j u$$

dans L^2, on en déduit que $\partial_x^p u$ appartient à L^2 et

$$\partial_x^p u = \sum_{j=0}^{p-1} a_j\, \partial_x^j u \,,$$

c'est-à-dire $Au = 0$. □

Le fait que la boule unité de Ker A est compacte une conséquence immédiate de ce lemme : une suite (u_n) d'éléments de Ker A de norme 1 dans H^p vérifie trivialement les hypothèses. Donc Ker A est de dimension finie. D'autre part, l'opérateur adjoint A^* a toutes les propriétés de A permettant de lui appliquer ce qui précède, son noyau est aussi de dimension finie. (Attention, l'expression de A^*, qui s'obtient par intégration parties dans le membre de gauche de l'égalité $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$, est un peu compliquée, et fait intervenir les dérivées des coefficients de A.)

Étape 4. Montrons que Im A est fermé.

Soit w_n une suite d'éléments de H^p telle que Aw_n a une limite $f \in L^2$. On veut montrer qu'il existe $w \in H^p$ tel que $Aw = f$. Pour cela, commençons par montrer que la distance dans H^p de w_n au sous-espace Ker A (qui est fermé puisque de dimension finie !) est bornée. C'est encore un conséquence du lemme 6. En effet, cette distance est atteinte en un point $y_n \in$ Ker A, c'est-à-dire

$$\text{dist}(w_n, \text{Ker A}) = \|w_n - y_n\|_{H^p} \quad \text{avec} \quad Ay_n = 0\,.$$

Supposons qu'elle ne soit pas bornée et considérons alors $u_n = (w_n - y_n)/\|w_n - y_n\|$. C'est une suite bornée par définition, et $Au_n = Aw_n/\|w_n - y_n\|_{H^p}$ tend vers zéro puisque le numérateur est borné et le dénominateur tends vers l'infini. D'après le lemme 6 elle admet donc une sous-suite convergente vers $u \in$ Ker A, alors que

$$\text{dist}(u_n, \text{Ker A}) = 1$$

par construction. Ceci est absurde.

Sachant que la suite $\|w_n - y_n\|_{H^p}$ est bornée, on peut à nouveau appliquer le lemme 6, non pas directement à $w_n - y_n$ (car $A(w_n - y_n)$ ne tend pas vers zéro) mais à $(w_n - y_n) - (w_m - y_m)$, ce qui montre que la suite $(w_n - y_n)$ est de Cauchy et donc convergente dans H^p vers w tel que $Aw = f$ (puisque $Ay_n = 0$).

Ceci achève la démonstration du théorème 5. $\square$

Théorème 6. *Sous les hypothèses du théorème 5, si λ n'appartient au spectre d'aucun des opérateurs à* coefficients gelés

$$A^y := \sum_{j=0}^{p} a_j(y)\, \partial_x^j\,, \quad y \in [-\infty, +\infty]\,,$$

alors $(\lambda - A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Remarque 3. *L'hypothèse que l'on fait ici sur les opérateurs à coefficients gelés est suffisante mais pas nécessaire : en fait il suffit qu'il existe des fonctions $\widetilde{a}_j$ ayant pour limites $a_j^{\pm}$ (et de dérivées tendant vers 0) telles que λ n'appartienne au spectre d'aucun opérateur $\widetilde{A}^y = \sum_{j=0}^{p} \widetilde{a}_j(y)\, \partial_x^j$. Ceci est cohérent avec la remarque suivante.*

Remarque 4. *L'indice ne dépend que des opérateurs limites $A^{\pm}$. En effet, si les coefficients de deux opérateurs A_0 et A_1 ont les mêmes limites en $\pm\infty$, ils ont aussi mêmes limites que $\theta\, A_1 - (1-\theta)\, A_0$ quel que soit $\theta \in [0,1]$ et donc pour tout $\lambda \notin \sigma(A^+) \cup \sigma(A^-)$, l'opérateur $(\lambda - \theta\, A_1 - (1-\theta)\, A_0)$ est de Fredholm. Comme il dépend continûment de θ, son indice est indépendant de θ.*

Démonstration. Il s'agit de calculer la différence entre la dimension du noyau de $(\lambda - A)$ et celle du noyau de $(\lambda - A)^*$. On va ici utiliser l'interprétation de l'équation $(\lambda - A)\, u = 0$ sous forme de système du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}(x;\lambda)\, U\,, \tag{7}$$

$$\text{où } \mathbb{A}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & I \\ \widetilde{a}_0(x;\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{p-1}(x) \end{pmatrix},$$

$$\text{et } \widetilde{a}_j(x) = -\,(a_p(x))^{-1}\, a_j^{\pm} \quad \forall j \in \{1,\dots,p-1\}\,, \quad \widetilde{a}_0(x;\lambda) = -\,(a_p(x))^{-1}\,(a_0(x) - \lambda)\,.$$

L'hypothèse signifie que toutes les matrices $\mathbb{A}(x;\lambda)$ sont *hyperboliques*, c'est-à-dire n'ont pas de valeur propre imaginaire pure. Donc en particulier, les sous-espaces stables et instables de ces matrices sont de dimension constante. Le théorème sera donc démontré si l'on prouve le

Lemme 7. *Si $\lambda \notin \sigma(A^+) \cup \sigma(A^-)$, l'indice de $(\lambda - A)$ est égal à la différence entre la dimension du sous-espace instable de $\mathbb{A}^-(\lambda)$ et celle du sous-espace instable de $\mathbb{A}^+(\lambda)$ (ou encore à la différence des dimensions des sous-espaces stables), les matrices $\mathbb{A}^{\pm}(\lambda)$ étant simplement les limites de $\mathbb{A}(x;\lambda)$ quand $x \to \pm\infty$.*

La démonstration de ce lemme repose en fait sur les deux résultats suivants. Le premier réduit la question aux opérateurs différentiels d'ordre 1 (!) et le second calcule effectivement l'indice pour les opérateurs différentiels d'ordre 1 « asymptotiquement hyperboliques ». Attention, le terme hyperbolique fait référence à la théorie des équations différentielles ordinaires et non à l'hyperbolicité au sens des équations aux dérivées partielles ; voir l'hypothèse du lemme 9.

Lemme 8. *Sous les hypothèses du théorème 5, l'indice de $(\lambda - A)$ est égal à l'indice de l'opérateur différentiel* d'ordre 1

$$\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda)\,.$$

Lemme 9. *Si $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathrm{M}_N(\mathbb{C}))$ a des limites $a^{\pm}$ en $\pm\infty$ qui sont hyperboliques, et si $\partial_x a$ tend vers zéro en $\pm\infty$, alors l'opérateur $\partial_x - a$ (qui est de Fredholm d'après le théorème 5) est d'indice égal à*

$$\dim E_u(a^-) - \dim E_u(a^+) = \dim E_s(a^+) - \dim E_s(a^-)\,.$$

En appliquant le lemme 9 à $a = \mathbb{A}(\cdot;\lambda)$ (et $N = np$), le lemme 8 prouve effectivement le le lemme 7. Il reste donc à prouver les lemmes 8 et 9.

Dém. du lemme 8. Par construction de $\mathbb{A}$, on a

$$(\lambda - A)\, u = 0\,,\ u \in H^p \quad \Leftrightarrow \quad (\,\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda)\,)\, U = 0 \ \text{ avec } \ U = \begin{pmatrix} u \\ \partial_x u \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_x^{p-1} u \end{pmatrix} \in H^1\,.$$

Ceci montre que

$$\operatorname{Ker}(\lambda - A) = P \operatorname{Ker}(\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda)),$$

où $P : U \mapsto U_1 = u$ et d'après la forme de $\mathbb{A}(x;\lambda)$, $P_{|\operatorname{Ker}(\partial_x - \mathbb{A}(x;\lambda))}$ est un isomorphisme. Par suite, on a

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda - A) = \dim \operatorname{Ker}(\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda)).$$

Il reste à vérifier que

$$\dim \operatorname{Ker}((\lambda - A)^*) = \dim \operatorname{Ker}((\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda))^*).$$

Ces opérateurs adjoints sont définis par :

$$(\lambda - A)^* z = \bar{\lambda} - \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \partial_x^j ((a_j)^* z),$$

et

$$(\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda))^* V = -\partial_x V - \mathbb{A}(\cdot;\lambda)^* V,$$

$$\mathbb{A}(\cdot;\lambda)^* = - \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \dots & & (a_0^* - \bar{\lambda}) \\ -I & \ddots & & & & \vdots \\ & \ddots & & & & \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & (\widetilde{a}_{p-2})^* \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -I & (\widetilde{a}_{p-1})^* \end{pmatrix}.$$

Si $V \in H^1$ est solution de l'équation différentielle adjointe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V = -\mathbb{A}(\cdot;\lambda)^* V, \tag{8}$$

alors en fait $V \in H^{+\infty}$ (on voit par récurrence que V appartient à tous les H^p) et on vérifie facilement que sa dernière composante V_p, qui appartient en particulier à H^p, est solution de $(\lambda - A)^* V_p = 0$. Récriproquement, si $z \in H^p$ est solution de $(\lambda - A)^* z = 0$, alors la fonction V définie par $V_p = z$ et $V_j = (a_j)^* V_p - \partial_x V_{j+1}$ pour $j \in \{p-1, \dots, 1\}$ est dans le noyau de $(\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda))^*$. Cette correspondance entre $\operatorname{Ker}((\lambda - A)^*)$ et $\operatorname{Ker}((\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda))^*)$ est bijective. D'où l'égalité entre les dimensions de ces sous-espaces. □

Démonstration du lemme 9. D'après la remarque 4, on peut supposer sans perte de généralité que a est *constante* pour $|x|$ assez grand. Notons $T(x,y)$ la résolvante de

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a(x)\, u, \tag{9}$$

c'est-à-dire que pour tout (x_0, u_0), $u(x) := T(x, x_0) u_0$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a(x)\, u, \\[2ex] u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

Pour $x \geq y \geq R$ assez grand, on a simplement $T(x,y) = \mathrm{e}^{(x-y)\,a^+}$ et pour $x \leq y \leq -R$, $T(x,y) = \mathrm{e}^{(x-y)\,a^-}$. Les matrices $a^\pm$ étant supposées hyperboliques, leurs sous-espaces stable et instable sont supplémentaires :

$$\mathbb{C}^N = E_s(a^\pm) \oplus E_u(a^\pm)\,.$$

Notons $k^\pm$ la dimension de $E_u(a^\pm)$. Si $(u_1^-, \ldots, u_{k^-}^-)$ est une base de $E_u(a^-)$ alors pour tout $y \leq -R$, $(T(\cdot,y)u_1^-, \ldots, T(\cdot,y)u_{k^-}^-)$ est une famille indépendante de solutions de (9) tendant vers zéro en $-\infty$. Et si $(u_{k^-+1}^-, \ldots, u_N^-)$ est une base de $E_s(a^-)$, $(T(\cdot,y)u_1^-, \ldots, T(\cdot,y)u_N^-)$ est une base de solutions de (9), dont seulement les k^- premières tendent vers 0 en $-\infty$ (les autres ayant un comportement exponentiel). De même, notons $T^*(x,y)$ la résolvante de l'équation différentielle adjointe

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -a(x)^*\,z\,. \tag{10}$$

(Grâce à l'unicité des solutions, on montre facilement l'identité $T^*(x,y) = T(y,x)^*$.) Comme

$$E_s(a^+) = E_s((-a^+)^*)^\perp$$

est de dimension $N - (N - k^+) = k^+$, si $(z_1^+, \ldots, z_{k^+}^+)$ est une base de $E_s((-a^+)^*)$, alors pour tout $y \geq R$, $(T(\cdot,y)z_1^+, \ldots, T(\cdot,y)z_{k^+}^+)$ est une famille indépendante de solutions de (10) qui engendre le sous-espace des solutions tendant vers zéro en $+\infty$. Or, si u est solution de (9) et z est solution de (10), $z(x)\cdot u(x)$ est indépendant de x. Par suite, si u est un élément de Ker $(\partial_x - a)$, c'est-à-dire une solution de (9) tendant vers zéro en $-\infty$ et en $+\infty$, elle doit appartenir à

$$\{\, u \in \text{Vect}\,(T(\cdot,y)u_1^-, \ldots, T(\cdot,y)u_{k^-}^-)\,;\ (T^*(\cdot,y)z_i^+ \cdot u) \equiv 0\,,\ i = 1, \ldots, k^+ \,\}\,.$$

Inversement, un élément de cet espace est nécessairement nul en $-\infty$, comme les u_j^-, et aussi en $+\infty$ car pour tout $i \in \{1, \ldots, k^+\}$,

$$0 = T^*(x,y)z_i^+ \cdot u(x) = \mathrm{e}^{-(x-y)\,(a^+)^*} z_i^+ \cdot u(x)$$

pour $x \geq y$ ($\geq R$) donc $u(x) \in E_s((-a^+)^*)^\perp = E_s(a^+)$. Ainsi on a l'égalité :

Ker $(\partial_x - a) = \{\, u \in \text{Vect}\,(T(\cdot,y)u_1^-, \ldots, T(\cdot,y)u_{k^-}^-)\,;\ (T^*(\cdot,y)z_i^+ \cdot u) \equiv 0\,,\ i = 1, \ldots, k^+ \,\}$.

Par conséquent, si r désigne le rang de la matrice rectangulaire

$$M := ((T^*(x,y)z_i^+ \cdot T(x,y)u_j^-)_{i \leq k^+, j \leq k^-}\,,$$

la dimension de Ker $(\partial_x - a)$ est égale à $k^- - r$. Pour les mêmes raisons, le noyau de $(\partial_x - a)^* = -(\partial_x + a^*)$ est l'espace

$$\{\, z \in \text{Vect}\,(T^*(\cdot,y)z_1^+, \ldots, T^*(\cdot,y)z_{k^+}^+)\,;\ (z \cdot T(\cdot,y)u_j^-) \equiv 0\,,\ j = 1, \ldots, k^- \,\}$$

et sa dimension est donc égale à $k^+ - r$, puisque r est aussi le rang de la matrice adjointe M^*. On en déduit que l'indice de $(\partial_x - a)$ est égal à $k^- - r - (k^+ - r) = k^- - k^+$. □

Le théorème 6 permet de préciser la localisation du spectre essentiel de A, qui se trouve ainsi être inclus dans une réunion continue (indexée par $y \in [-\infty, +\infty]$ de courbes algébriques). En pratique, si l'opérateur A provient de la linéarisation autour d'une solution stationnaire d'un problème d'évolution, on pourra assez facilement déterminer si ce spectre essentiel se situe dans la partie gauche (=« stable ») du plan complexe.

La notion importante derrière les théorèmes 5 et 6 est celle de dichotomie exponentielle (voir par exemple [1, § 6.4]). Lorsqu'elle existent, les dichotomies exponentielles permettent en outre de construire la fonction de Green de l'opérateur différentiel à coefficients variables. Si l'on note $\mathbb{T}_\lambda(x, y)$ la résolvante de l'équation différentielle (7) associée à $(\lambda - A)$, on a le résultat suivant, que l'on peut déduire du théorème de Coppel (voir [1, théorème 6.25, p. 203]) en précisant la régularité par rapport à λ.

Lemme 10. *Si $\lambda \notin \sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)$, et si la convergence des coefficients en $\pm\infty$ est exponentiellement rapide, alors il existe des projecteurs $\mathbb{P}^\pm_\lambda(x)$ and $\mathbb{Q}^\pm_\lambda(x) = I - \mathbb{P}^\pm_\lambda(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^\pm$, continus par rapport à x et analytiques par rapport à $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(\sigma(A^-) \cup \sigma(A^+))$, tels que*

i) $\mathbb{T}_\lambda(x, y)\mathbb{P}^\pm_\lambda(y) = \mathbb{P}^\pm_\lambda(x)\mathbb{T}_\lambda(x, y) \quad \forall\, x\,,\ y \in \mathbb{R}^\pm\,; x \geq y\,,$

et pour tout compact $K \subset \mathbb{C}\backslash(\sigma(A^-) \cup \sigma(A^+))$, il existe $C \geq 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour $x\,,\ y \in \mathbb{R}^\pm$ avec $x \geq y$ et $\lambda \in K$,

ii) $\|\mathbb{T}_\lambda(x, y)\mathbb{P}^\pm_\lambda(y)\| \leq Ce^{-\alpha(x-y)}\,,$

iii) $\|\mathbb{T}_\lambda(y, x)\mathbb{Q}^\pm_\lambda(x)\| \leq Ce^{-\alpha(x-y)}\,.$

Théorème 7. *Si $\lambda \notin \sigma(A)$, il existe une fonction G_λ satisfaisant*

$$\|G_\lambda(x, y)\| \,\leq\, C\,\mathrm{e}^{-\alpha|x-y|} \quad , \; x, y \in \mathbb{R}\,,$$

avec C, $\alpha > 0$ localement uniformes en λ, telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$((\lambda \,-\, A)^{-1}f)(x) \,=\, \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x, y)\, f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Cette fonction est donnée par

$$G_\lambda \,=\, P\,\mathbb{G}_\lambda\, J\,,$$

où $J \,:\, f \in \mathbb{C}^n \,\mapsto\, (0, \cdots, 0, -(a_p)^{-1} f)^t \in \mathbb{C}^{np}\,, \qquad P \,:\, U \in \mathbb{C}^{np} \,\mapsto\, U_1 \in \mathbb{C}^n\,,$ et $\mathbb{G}_\lambda$ est la fonction de Green de $\partial_x \,-\, \mathbb{A}(\cdot; \lambda)$. De plus, G_λ dépend de λ de façon analytique dans $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$, et les constantes C et α dans l'estimation sont localement uniformes en λ.

Démonstration. Lorsque λ n'est pas dans le spectre de A, $(\lambda - A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0, c'est-à-dire que les entiers k^- et k^+ (définis plus haut) sont égaux. De plus, λ n'étant pas valeur propre, la matrice M (définie plus haut encore) est de rang $k^- = k^+$, ce qui implique en particulier que les espaces $\mathrm{Im}(\mathbb{P}^+_\lambda(0))$ et $\mathrm{Im}(\mathbb{Q}^-_\lambda(0))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$. Si note $\pi^+(\lambda)$ la projection sur $\mathrm{Im}(\mathbb{P}^+_\lambda(0))$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\mathbb{Q}^-_\lambda(0))$, et $\pi^- \,=\, I - \pi^+$, on montre que $\mathbb{G}_\lambda$ se décompose en

$$\mathbb{G}_\lambda(x, y) \,=\, \mathbf{1}_{x>y}\,\mathbb{G}^>_\lambda(x, y) \,-\, \mathbf{1}_{x<y}\,\mathbb{G}^<_\lambda(x, y)\,,$$

chaque morceau se décomposant respectivement en

$$\mathbb{G}^>_\lambda(x, y) \,=\, \mathbf{1}_{x>y>0}\,\mathbb{G}^{>0}_\lambda(x, y) \,+\, \mathbf{1}_{0>x>y}\,\mathbb{G}^{0>}_\lambda(x, y) \,+\, \mathbf{1}_{x>0>y}\,\mathbb{G}^{>0>}_\lambda(x, y)\,,$$

et

$$\mathbb{G}_\lambda^{<}(x,y) \,=\, \mathbf{1}_{x<y<0}\,\mathbb{G}_\lambda^{<0}(x,y) \,+\, \mathbf{1}_{0<x<y}\,\mathbb{G}_\lambda^{0<}(x,y) \,+\, \mathbf{1}_{x<0<y}\,\mathbb{G}_\lambda^{<0<}(x,y)\,,$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_\lambda^{>0}(x,y) &= \mathbb{T}_\lambda(x,y)\,\mathbb{P}_\lambda^{+}(y) && + \mathbb{T}_\lambda(x,0)\,\pi_\lambda^{+}\,\mathbb{T}_\lambda(0,y)\,\mathbb{Q}_\lambda^{+}(y)\,,\\
\mathbb{G}_\lambda^{<0}(x,y) &= \mathbb{T}_\lambda(x,y)\,\mathbb{Q}_\lambda^{-}(y) && + \mathbb{T}_\lambda(x,0)\,\pi_\lambda^{-}\,\mathbb{T}_\lambda(0,y)\,\mathbb{P}_\lambda^{-}(y)\,,\\
\mathbb{G}_\lambda^{0>}(x,y) &= -\,\mathbb{T}_\lambda(x,y)\,\mathbb{P}_\lambda^{-}(y) && + \mathbb{T}_\lambda(x,0)\,\pi_\lambda^{-}\,\mathbb{T}_\lambda(0,y)\,\mathbb{P}_\lambda^{-}(y)\,,\\
\mathbb{G}_\lambda^{0<}(x,y) &= -\,\mathbb{T}_\lambda(x,y)\,\mathbb{Q}_\lambda^{+}(y) && + \mathbb{T}_\lambda(x,0)\,\pi_\lambda^{+}\,\mathbb{T}_\lambda(0,y)\,\mathbb{Q}_\lambda^{+}(y)\,,\\
\mathbb{G}_\lambda^{>0>}(x,y) &= && -\,\mathbb{T}_\lambda(x,0)\,\pi_\lambda^{+}\,\mathbb{T}_\lambda(0,y)\,\mathbb{P}_\lambda^{-}(y)\,,\\
\mathbb{G}_\lambda^{<0<}(x,y) &= && -\,\mathbb{T}_\lambda(x,0)\,\pi_\lambda^{-}\,\mathbb{T}_\lambda(0,y)\,\mathbb{Q}_\lambda^{+}(y)\,.
\end{aligned}$$

Pour le montrer, on utilise encore une fois la formule de Duhamel. En effet, si

$$(\partial_x - \mathbb{A}(\cdot;\lambda))U \,=\, F\,,$$

avec $U \in H^1$, alors il existe $U^+ \in \mathrm{Im}(\mathbb{P}_\lambda^{+}(0))$ et $U^+ \in \mathrm{Im}(\mathbb{Q}_\lambda^{-}(0))$ tels que, pour $x \geq 0$,

$$U(x) \,=\, \mathbb{T}_\lambda(x,0)\,U^+ \,+\, \int_0^x \mathbb{T}_\lambda(x,y)\,\mathbb{P}_\lambda^{+}(y)\,F(y)\,\mathrm{d}y \,-\, \int_x^{+\infty} \mathbb{T}_\lambda(x,y)\,\mathbb{Q}_\lambda^{+}(y)\,F(y)\,\mathrm{d}y$$

et pour $x \leq 0$,

$$U(x) \,=\, \mathbb{T}_\lambda(x,0)\,U^- \,+\, \int_0^x \mathbb{T}_\lambda(x,y)\,\mathbb{Q}_\lambda^{-}(y)\,F(y)\,\mathrm{d}y \,+\, \int_{-\infty}^x \mathbb{T}_\lambda(x,y)\,\mathbb{P}_\lambda^{-}(y)\,F(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

La continuité de U en 0 permet d'exprimer U^- et U^+ comme des projections sur $\mathrm{Im}(\mathbb{Q}_\lambda^{-}(0))$ et $\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\lambda^{+}(0))$ d'intégrales prises entre $-\infty$ et 0 et entre 0 et $+\infty$. Il suffit alors de substituer U^- et U^+ par les expressions intégrales ainsi obtenues, et identifier le noyau $\mathbb{G}_\lambda$ cas par cas, ce qui est fastidieux mais facile. $\square$

5 Valeurs propres des opérateurs différentiels

Index

Références

[1] S. Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles. Cours et exercices corrigés.* Dunod, SMAI, Collection Sciences Sup, 2010.

[2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.

[3] A. Chazarain, J. et Piriou. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[4] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage. Calcul numérique. Ondelettes*. Masson, 1990.

[5] B. H. Gilding and R. Kersner. *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 60. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[6] P. Grindrod. *The theory and applications of reaction-diffusion equations*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1996. Patterns and waves.

[7] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, volume 840 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[8] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[9] B. Reed, M.and Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press, New York, 1975.

[10] M. Schechter. *Spectra of partial differential operators*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1971. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 14.

[11] R. S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2003. Reprint of the 1994 original [CRC, Boca Raton ; MR1276724 (95f :42001)].