Calcul différentiel, TD 6

Différentielles d'ordre ≥ 2, formules de Taylor

1. Si $E_1, \ldots, E_p, F$ sont des espaces normés (sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{L}_p(E_1 \times \ldots \times E_p, F)$ désignera l'espace vectoriel normé des applications p-linéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_p$ dans F.

   Montrer que si $n \geq 2$ et $1 \leq m \leq n-1$, si $E_1, \ldots, E_n, F$ sont des $\mathbb{K}$-espaces normés, l'application Φ, qui à toute $f \in \mathcal{L}_m(E_1 \times \ldots \times E_m, \mathcal{L}_{n-m}(E_{m+1} \times \ldots \times E_n, F))$ associe l'application

   $\Phi(f) :\ E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ définie par $\Phi(f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_n)$,

   est une isométrie de $\mathcal{L}_m(E_1 \times \ldots \times E_m, \mathcal{L}_{n-m}(E_{m+1} \times \ldots \times E_n, F))$ sur $\mathcal{L}_n(E_1 \times \ldots \times E_n, F)$.

   En déduire par récurrence sur n que $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \ldots, \mathcal{L}(E_n, F) \ldots))$ est canoniquement isométrique à $\mathcal{L}_n(E_1 \times \ldots \times E_n, F)$.

2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée $||.||$. On posera, pour simplifier les écritures, $f(x) = ||x||$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que f n'est pas différentiable en 0.

   (b) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $df_x(u)$, $d^2 f_x(u, v)$, $d^3 f_x(u, v, w)$.

   (c) Les applications $x \mapsto \cos f(x)$ et $x \mapsto \sin f(x)$ sont-elles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$?

3. On dit qu'une partie C d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un cône si, $\forall x \in C$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha x \in C$. On dit qu'une application f d'un cône C de E dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F est homogène de degré $m \in \mathbb{R}$ si $\forall x \in C$, $\forall t > 0$, $f(tx) = t^m f(x)$.

   Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés.

   (a) Soit C un cône ouvert de E et $f :\ C \to F$ une application homogène de degré $m \in \mathbb{R}$, différentiable sur C. Montrer que l'application $df :\ C \to \mathcal{L}(E, F)$ est homogène de degré $m - 1$.

   (b) Soit $f :\ E \to F$ une application homogène de degré $m \in \mathbb{N}^*$ et de classe $\mathcal{C}^m$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $d^n f = 0$ si $n > m$.

   (c) Soit $f :\ E \to F$ une application homogène de degré $m \in \mathbb{N}^*$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

      i. Montrer que $d^p f_0 = 0$ si $1 \leq p < m$.

      ii. Montrer que $d^m f_x(x, \ldots, x) = m! f(x)$, $\forall x \in E$. Indication : considérer, pour $x \in E$ fixé, la fonction $G :\ \mathbb{R} \to F$ définie par $G(t) = f(tx)$ et montrer par récurrence sur $p \in \{1, \ldots, m\}$ que $G^{(p)}(t) = d^p f_{tx}(x, \ldots, x)$.

4. Soit $f :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 y^2 + z^4, y e^x)$.
   Calculer $d^3 f_{(x,y,z)}((\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), (\xi_3, \eta_3, \zeta_3))$.

5. Soient E un espace normé et $f :\ E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur E telle que $f(x) > 0$, $\forall x \in E$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $||d^2 f_x|| \leq M$, $\forall x \in E$.

(a) Montrer que si $h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, $\forall x \in E$, $0 < f(x) + \lambda df_x(h) + \dfrac{\lambda^2}{2} M||h||^2$.
Indication : appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f entre x et $x + \lambda h$.

(b) En déduire que $||df_x|| \leq \sqrt{2Mf(x)}$, $\forall x \in E$.

6. Soient E un espace normé et U un ouvert convexe de E. On dit qu'une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ est convexe si, $\forall (a, b) \in U^2$, $\forall t \in [0, 1]$,

$$g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + (1-t)g(b). \tag{1}$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

(a) On suppose que f est convexe. Soit $(x, y) \in U^2$. On remarquera que l'on peut définir sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 l'application $t \mapsto \Phi(t) = f(y + t(x - y))$. Montrer que $\Phi'(0) \leq f(x) - f(y)$ et en déduire que

$$f(x) - f(y) \geq df_y(x - y). \tag{2}$$

(b) On suppose que f vérifie l'inégalité (2) pour tout couple $(x, y) \in U^2$. Montrer que f est convexe.

(c) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

i. Montrer que si $d^2 f_x(h, h) \geq 0$, $\forall x \in U$, $\forall h \in E$, f est convexe. (Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral).

ii. Réciproquement, on suppose que f est convexe. Montrer que $d^2 f_x(h, h) \geq 0$, $\forall x \in U$, $\forall h \in E$. (Raisonner par l'absurde et utiliser la formule de Taylor-Young).