

Calcul différentiel, TD 7

Extrema

1. Trouver les extrema de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$.
 - (a) Déterminer ses extrema relatifs.
 - (b) f a-t-elle un maximum absolu et un minimum absolu sur \mathbb{R}^3 ?
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.
 - (a) Déterminer les extrema relatifs de f .
 - (b) f a-t-elle un maximum absolu et un minimum absolu sur \mathbb{R}^3 ?
 - (c) Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Déterminer $M = \sup_{(x,y) \in T} f(x, y)$ et $m = \inf_{(x,y) \in T} f(x, y)$.
4. On considère dans \mathbb{R}^3 l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Trouver, parmi les parallélépipèdes rectangles de côtés parallèles aux axes, inscrits dans cet ellipsoïde, celui dont le volume est maximum.

5. Soient f et g les applications de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définies par $f(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$, $g(x, y, z) = xyz - 1000$. On pose $P =]1, 1000[)^3$, $A = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3; g(x, y, z) = 0\}$, $B = P \cap g^{-1}(0)$, $f_P = f|_P$.
 - (a) Montrer que A est un fermé de \mathbb{R}^3 , que $A \cap \bar{P}$ est compact et que le minimum de $f_{A \cap \bar{P}}$ n'est atteint en aucun point de $(A \cap \bar{P}) \setminus (A \cap P)$.
 - (b) Trouver les extrema de $f_P|_B$.
 - (c) En déduire les dimensions d'une boîte parallélépipédique rectangle ayant pour volume 1000 et d'aire minimale.
6. On considère \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ et de la distance euclidienne d . Soient Γ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et Δ la droite d'équation $x + y = 4$. Trouver les points $P \in \Gamma$ et $Q \in \Delta$ tels que $d(P, Q)$ soit minimum. Indications : on remarquera que, si ces points existent, ils sont nécessairement dans $K = \bar{D}((0, 0), 5)$; on montrera qu'ils existent effectivement ; enfin on ramènera leur recherche à la détermination des extrema liés d'une certaine application de $U = \overset{\circ}{K} \times \overset{\circ}{K} = \overset{\circ}{D}((0, 0), 5) \times \overset{\circ}{D}((0, 0), 5)$ dans \mathbb{R} .