TD Equations Différentielles n° 3

Théorie de Floquet

1)Démontrer le théorème de Floquet

Considérons le système différentiel $\dot{X} = A(t)X$ où A est une matrice T-périodique de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice fondamentale $\Phi(t)$ associée à ce système (i.e. une matrice formée par une base de solutions du système différentiel) peut s'écrire

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}$$

où B est une matrice à coefficient constant et P une matrice T-périodique.

2) Soit $\rho_i)_{i=1..n}$ les valeurs propres de e^{TB} et λ_i tel que $\rho_i = e^{\lambda_i T}$. Montrer que

$$\Pi_{i=1}^n \rho_i = exp \int_0^T TrA(t)dt, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{T}\int_0^T TrA(t)dt(mod \frac{2k\pi}{T}).$$

Donner une condition sur les ρ_i pour que toute solution du système différentiel $\dot{X} = A(t)X$ converge vers 0 pour $t \to \infty$.

3) Soit $\dot{X} = A(t)X$, A matrice de taille n et T-périodique et f une fonction scalaire T-périodique.

i) On suppose $n = 1$ et $A(t) = f(t)$. Déterminer B et $P(t)$ du théorème de Floquet. Donner une condition sur f pour que les solutions restent bornées pour $t \to \pm\infty$ ou soient périodiques.

ii)Soit $n = 2$ et $A(t) = f(t)C$ où C est une matrice de taille 2 à coefficients constants. Calculer B et $P(t)$ du théorème de Floquet et donner des conditions sur f et C pour que les solutions du système différentiel soient bornées quand $t \to \pm\infty$ ou périodiques.

iii) Soit $n = 2$ et $A(t)$ s'écrit

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Est ce que les solutions du système différentiel associé sont bornées?

4) Soit le système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y + x\cos t - y\sin t, \\ \dot{y} &= -x + 2y - x\cos t + y\sin t. \end{aligned}$$

Montrer qu'il n'y a pas de solution autre que la solution nulle qui vérifie $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$.

Instabilité paramétrique

1) Trouver la forme du domaine de stabilité (pour la solution nulle) sur le plan (ε, ω) du système décrit par l'équation $x'' = -f(t)x$ où

$$\begin{aligned} f(t) &= \omega + \varepsilon, \text{ si } 0 \leq \text{t} < \pi, \\ f(t) &= \omega + \varepsilon, \text{ si } \pi \leq \text{t} < 2\pi \end{aligned}$$

où f est 2π périodique et $\varepsilon << 1$.

2) Reprendre la question précédente sur l'équation de Hill Mathieu $x'' = -\omega^2(1+\varepsilon\cos t)x$ (**plus difficile**)