TP4 – Sage

1 Cherchez l'erreur...

Récupérer le fichier à l'adresse suivante :

`http://math.univ-lyon1.fr/~bergot/teaching/Erreurs-Sage.ipynb`

Charger le fichier dans le navigateur et corriger les erreurs après avoir identifié l'origine des messages d'erreur.

2 Agrégation 2005 - Option C

1. Un tour de prestidigitation

Le prestidigitateur (B) demande à un spectateur (A) de choisir un nombre entre 0 et 15, et il lui pose sept questions. Le prestidigitateur pose sept questions à A, qui peut répondre par oui (1) ou non (0), et peut mentir au plus une fois.

Le prestidigitateur dit alors au spectateur s'il a menti, et dans ce cas à quelle question, et enfin annonce le nombre que le spectateur avait choisi :

PENSEZ À UN NOMBRE ENTRE 0 ET 15.	
Répondez aux questions suivantes :	**(Vous pouvez mentir une fois.)**
1) Est-il ≥ 8 ?	2) Est-il dans $\{4,5,6,7,12,13,14,15\}$?
3) Est-il dans $\{2,3,6,7,10,11,14,15\}$?	4) Est-il impair ?
5) Est-il dans $\{1,2,4,7,9,10,12,15\}$?	6) Est-il dans $\{1,2,5,6,8,11,12,15\}$?
7) Est-il dans $\{1,3,4,6,8,10,13,15\}$?	

Comment trouver le nombre

Notons $m_i = 1$ ou 0 suivant que la réponse à la i-ème question est oui ou non, et soit $m = (m_1, \dots, m_7)$ le vecteur de $\mathbf{F}_2^7$ correspondant.

Soit k l'entier dont la représentation binaire est $\overline{cba}$, avec

$$a = m_1 + m_3 + m_5 + m_7, \quad b = m_2 + m_3 + m_6 + m_7, \quad c = m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \mod 2.$$

Si $k = 0$, il n'y a pas eu de mensonge.

Sinon, la k-ième réponse est fausse. On corrige m en changeant la k-ième réponse, et la représentation en base 2 du nombre cherché est donnée par les quatre premières composantes de m.

- Le candidat pourra expliquer le "tour de prestidigitation" décrit au paragraphe 1, notamment la méthode pour trouver le nombre. (Pourquoi donne-t-elle le nombre choisi ?)
- Il pourra également l'illustrer sur ordinateur (par exemple en faisant jouer le jury).

3 Agrégation 2013 - Option C

3. La transformation D_2

Soit $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction, échantillonnée par pas de $1/2^n$; on connaît donc la suite des valeurs $(f(i/2^n))$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$. Pour fixer les idées, prenons par exemple $n = 4$, et soit $A_1 = [s_0 s_1 \dots s_{15}]$ les 16 valeurs de l'échantillon.

La *transformation* D_2 consiste à prendre les moyennes $s_{0,1} = (s_0 + s_1)/2, s_{2,3} = (s_2 + s_3)/2$, etc. ainsi que les différences $d_{0,1} = (s_0 - s_1)/2, d_{2,3} = (s_2 - s_3)/2, \dots$. On obtient une seconde suite

$$A_2 = [s_{0,1}; s_{2,3}; \dots ; s_{14,15}; d_{0,1}; \dots ; d_{14,15}]$$

dont la longueur est toujours 16, et qui permet bien sûr de retrouver la suite A_1. Les huit premiers termes correspondent à un changement d'échelle de l'échantillon initial, en en donnant une vision deux fois plus grossière, plus *lissée*, et les huit derniers consistent en les "détails" qui ont été supprimés lors de ce changement d'échelle.

On continue le processus en appliquant la transformation ci-dessus aux 8 premiers termes de la nouvelle suite, et en gardant les 8 derniers, d'où une suite A_3 dont les quatre premiers termes consistent en des moyennes, et ainsi de suite jusqu'à une suite A_5, dont le premier terme consiste en la moyenne des termes de A_1, et les autres termes sont des différences de termes des suites précédentes.

On peut bien sûr revenir de la suite A_5 à la suite A_1, en effectuant les transformations inverses.

Pour voir l'intérêt de cette transformation, prenons un exemple : si l'échantillon initial est

$$123, 122, 124, 124, 128, 129, 134, 137, 140, 142, 145, 147, 153, 155, 156, 155,$$

les suites successives sont :

$$\begin{array}{l}
122.5, 124, 128.5, 135.5, 141, 146, 154, 155.5, 0.5, 0, -0.5, -1.5, -1, -1, -1, 0.5 \\
123.25, 132, 143.5, 154.75, -0.75, -3.5, -2.5, -0.75, 0.5, 0, -0.5, -1.5, -1, -1, -1, 0.5 \\
127.625, 149.125, -4.375, -5.625, -0.75, -3.5, -2.5, -0.75, 0.5, 0, -0.5, -1.5, -1, -1, -1, 0.5 \\
138.375, -10.75, -4.375, -5.625, -0.75, -3.5, -2.5, -0.75, 0.5, 0, -0.5, -1.5, -1, -1, -1, 0.5
\end{array}$$

Notre échantillon étant assez régulier, on en obtient ainsi déjà une compression non négligeable (en base 2, on divise presque par 2 le nombre de chiffres à stocker) et ceci sans perte, puisqu'on n'a perdu aucune information au cours des transformations D_2 que l'on a effectuées.

Si maintenant on annule, dans la dernière suite, les termes de valeur absolue < 1, on obtient

$$138.375, -10.75, -4.375, -5.625, 0, -3.5, -2.5, 0, 0, 0, 0, -1.5, -1, -1, -1, 0$$

et, en faisant les transformations inverses, l'echantillon initial devient (une fois le résultat final arrondi)

$$[123, 123, 123, 123, 129, 129, 134, 137, 140, 142, 145, 147, 154, 156, 155, 155]$$

soit une erreur relative inférieure à 0.003.

Si maintenant, on annule les termes de valeur absolue ≤ 1.5, on trouve

$$[138.375, -10.75, -4.375, -5.625, 0, -3.5, -2.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

qui donne après avoir effectué les transformations inverses

$$[123, 123, 123, 123, 129, 129, 136, 136, 141, 141, 146, 146, 155, 155, 155, 155],$$

d'où cette fois une erreur relative d'environ 6%.

- On pourra illustrer ce texte à l'aide d'un logiciel de calcul formel, en calculant la transformation D_2 sur divers types d'échantillons, plus ou moins réguliers ; en annulant les coefficients "de détail" plus ou moins brutalement, on pourra montrer les dégradations obtenues par rapport à l'image initiale.