TP5 – Python

Pour tout le TP, on pourra entrer les commandes

```
import numpy as np
import numpy.random as npr
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integ
```

1 Méthodes d'approximation

Exercice 1 - Méthode de Monte-Carlo

Soient deux solides S_i et S tels que $S_i \subset S \subset \mathbb{R}^d$. Le volume V de S est supposé connu, et on cherche une approximation du volume V_i de S_i. La méthode de Monte-Carlo consiste à tirer aléatoirement n points dans S avec une probabilité uniforme, et compter le nombre de points n_i qui sont situés dans S_i. Une approximation de V_i est alors donnée par :

$$V_i \approx R(n) = V\,\frac{n_i}{n}$$

Le but est de calculer une approximation du volume de la boule unité $\mathcal{B}_d(0,1)$ placée dans le cube $\mathcal{R}_d = [-1,1]^d$ par la méthode de Monte-Carlo.

1. La suite permettant de calculer le volume d'une boule de dimension n quelconque est :

$$\begin{cases} V_1 = 2 \\ V_{n+1} = V_n \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n/2} dx, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   Écrire une fonction `VolHyperboule(d)` qui calcule numériquement le volume de $\mathcal{B}_d(0,1)$.
   $\hookrightarrow$ *Utiliser la commande* `integ.quad`.
2. Écrire une fonction `boule(n,d)` qui calcule une approximation du volume de $\mathcal{B}_d(0,1)$ située dans $\mathcal{R}_d$ par la méthode de Monte-Carlo avec n points et pour d quelconque.
3. On considère $d = 2$.
   (a) Tracer $R(n)$ pour $n \leq 5000$.
   (b) Comparer la valeur moyenne obtenue pour $n \in [2500, 5000]$ avec la valeur théorique.
4. Mêmes questions pour $d = 3$.
5. Pour $d = 20$, calculer la valeur moyenne de $R(n)$ pour $n \in [2500, 5000]$ et comparer avec la valeur numérique obtenue avec la suite (V_n). Qu'en pensez-vous ? Recommencer pour $n \in [22500, 25000]$

Exercice 2 - Densité à support compact

On souhaite simuler une variable aléatoire Z sachant un événement A. Pour cela, on peut simuler de manière répétée et indépendante (Z, A), et rejeter le résultat quand A n'est pas réalisé.

On considère un trifolium de Descartes dont les équations paramétrique et cartésiennes sont

$$\theta \mapsto \begin{cases} x = \cos(3\theta)\,\cos(\theta) \\ y = \cos(3\theta)\,\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in [0,\pi] \qquad (1)$$

$$(x^2+y^2)^2 - x(x^2-3y^2) = 0 \qquad (2)$$

Le graphe est alors inclu dans le rectangle $[-1,1]^2$.

1. Tracer un trifolium en utilisant l'équation (1).
2. Écrire une fonction `RejetTrefle(n)` génèrant une échantillon de loi uniforme de taille n à l'intérieur du trifolium par la méthode du rejet en utilisant l'équation (2).
3. Vérifier que l'échantillon obtenu suit une loi uniforme en traçant les points obtenus.

Exercice 3 - Densité à support non compact

On considère une variable aléatoire X de densité f connue mais dont la simulation directe n'est pas facile, et une variable aléatoire Y de densité g vérifiant

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in R,\ f(x) \leq cg(x) \qquad (3)$$

Soit U une loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de Y, la loi de X est alors la loi de Y sachant l'événement $E = cg(Y)U < f(Y)$.

On souhaite construire une échantillon suivant la loi normale réduite centrée de densité f en utilisant la loi de Laplace standard de densité g. On peut montrer que dans ce cas $c = \sqrt{2e/\pi}$.

1. Vérifier graphiquement l'inégalité (3) en traçant f et cg sur $[-6, 6]$.
2. Contruire un échantillon X de taille $N = 10000$ suivant la loi normale centrée réduite par la méthode du rejet à partir de la loi de Laplace. On utilisera pour cela le fait que si u suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $y = \ln(2u)\mathbb{1}_{u<1/2} - \ln(2(1-u))\mathbb{1}_{u \geq 1/2}$ suit la loi de Laplace.
3. Tracer l'histogramme correspondant à l'échantillon X et la densité f.
