Notes de cours
Algèbre Linéaire et Analyse Matricielle
3BIM INSA Lyon
2014-2015
v19112014

Ces notes de cours sont inspirées des livres de Algèbre des matrices de J Fresnel [1] et Numerical Linear Algebra de LN Trefethen et D Bau III [2].

2 Matrices et vecteurs

Exercice 1. Soit A une matrice 4×4 à laquelle on applique les transformations suivantes :

1. on double la colonne 2,
2. on divise la colonne 1 par deux
3. on additionne les trois premières colonnes
4. on soustrait la colonne 2 des colonnes 3 et 4
5. on échanges les colonnes 1 et 3
6. on remplace la colonne 2 par la colonne 1
7. on supprime les colonne 1 et 3, de sorte que le nombre de colonnes est réduit de 2

Ecrivez le résultat comme le produit de 8 matrices. Ecrivez ensuite le résultat comme un produit ABC de 3 matrices.

2.1 Vecteurs et matrices orthogonales

Le **conjugué** d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, noté $\bar{z}$ ou z^*, est le nombre de même partie réelle mais de partie imaginaire opposée: si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} = z - iy$. L'**adjoint** d'une matrice A à m lignes et n colonnes, noté A^*, est la matrice à n lignes et m colonnes avec $A^* = [b_{ij}] = [\bar{a}_{ji}]$. Pour les matrices à coefficients réels, l'adjoint est la trasnposée.

Le **produit scalaire** de deux vecteurs colonnes $x, y \in \mathbb{C}^n$ est le produit (matriciel) de l'adjoint de x par y:

$$x^* y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i \tag{1}$$

La **norme euclidienne** de $x \in \mathbb{C}^n$, notée $||x||$, est

$$||x|| = \sqrt{x^* x} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Big)^{1/2}. \tag{2}$$

Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{C}^n$ sont **orthogonaux** si $x^*y = 0$. On dit que x est orthogonal à y. Deux ensembles de vecteurs X et Y sont orthogonaux si tout $x \in X$ est orthogonal à tout $y \in Y$. Un ensemble X est orthogonal si il est orthogonal à lui-même. Un ensemble de vecteurs S est orthonormé si S est orthogonal et pour tout $x \in S$, $||x|| = 1$.

Théorème 2.1. *Les vecteurs d'un ensemble orthogonal forment une famille libre (sont linéairement indépendants).*

Une matrice $Q \in M_n(\mathbb{C})$ est **unitaire** si $Q^* = Q^{-1}$, c.-à-d. si $Q^*Q = I$, la matrice identité.

Exercice 2. Une matrice $[a_{ij}]$ est **triangulaire** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$ (**triangulaire supérieure**) ou bien si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$ (**triangulaire inférieure**). Montrez que si une matrice A est triangulaire et unitaire, alors elle est diagonale

2.2 Matrice inverse fois vecteur

Si $x = A^{-1}b$, pour une matrice carrée inversible A, alors x est l'unique vecteur qui satisfait l'équation $Ax = b$. Le vecteur x est le vecteur de coefficient (ou coordonnées) de l'unique expansion linéaire de b dans la base des colonnes de A. La multiplication par A^{-1} est une *opération de changement de base.*

Si $b \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur dans la **base canonique** $(e_1, e_2, ...e_n)$ avec $[e_i]_j = 1$ si $i = j$ et 0 sinon, alors $A^{-1}b$ est le vecteur des coefficients de b dans la base $(a_1, a_2, ...a_n)$, avec a_i la $i$ème colonne de A.

2.3 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée. Un vecteur $x \in K^n$, $x \neq 0$ est un **vecteur propre**, et $\lambda \in K$ est une **valeur propre**, si

$$Ax = \lambda x. \tag{3}$$

Idée: la matrice A agit sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ comme la multiplication scalaire (λx). Ce sous-espace vectoriel S est appelé **sous-espace propre**, et tout$x \in S$ est un vecteur propre.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre** de A, noté $\Lambda(A)$, sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Applications:

- Calculer les itérations successives de A: A^k, ou encore l'exponentielle d'une matrice e^{tA}, en découplant un système linéaires en plusieurs éléments scalaires.
- Comportement asymptotique de systèmes dynamiques linéaires.

- Ranking.
- ...

Exercice 3. Une matrice A est hermitienne si $A = A^*$. Montrez que toutes les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles. Montrez que si x et y sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, alors x et y sont orthogonaux.

2.4 Décomposition en valeurs propres

Définition 2. Une **décomposition en valeurs propres** d'une matrice carrée A est une factorisation

$$A = XDX^{-1}, \tag{4}$$

avec X une matrice inversible et D une matrice **diagonale** ($D = [d_{ij}]$ avec $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$). *Attention cette factorisation n'existe pas toujours !*

La décomposition en valeurs propres peut être réécrite

$$AX = XD. \tag{5}$$

Par définition de la multiplication de deux matrices, si x_i est la $i$ème colonne de X et λ_i la $i$ème entrée de D, alors

$$Ax_i = \lambda_i x_i. \tag{6}$$

Le vecteur x_i est donc un vecteur propre de A, et λ_i est sa valeur propre associée. La décomposition en valeurs propre est un changement de base vers les coordonnées des vecteurs propres. Si $Av = b$ et la matrice A se décompose $A = XDX^{-1}$, on a

$$D(X^{-1}v) = X^{-1}b \tag{7}$$

Les vecteurs $X^{-1}v$ et $X^{-1}b$ sont les vecteurs v et b exprimés dans la base des vecteurs propres que sont les colonnes de X. Dans cette base, la matrice A s'exprime comme une matrice diagonale D, qui agit sur chaque vecteur par multiplications scalaires. (La décomposition en valeurs propres n'est pas la meilleure façon de résoudre le système linéaire $Av = b$.)

2.5 Multiplicité géométrique

Si λ est une valeur propre de A, soit E_λ le s.e.v. vectoriel engendré par les vecteurs propres associés: $E_\lambda = \mathrm{Vect}(\{x | Ax = \lambda x\})$. Alors E_λ est un s.e.v. **invariant** de A: pour tout $x \in E_\lambda$, $Ax \in E_\lambda$. La dimension de E_λ sur $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_\lambda$ est appelée **multiplicité géométrique de** λ. La multiplicité géométrique de λ correspond aussi à la dimension du $\ker(A - \lambda I)$.

Exercice 4. Montrez que la multiplicité géométrique de λ correspond aussi à la dimension du $\ker(A - \lambda I)$.

2.6 Polynôme caractéristique

Définition 3. Le **polynôme caractéristique** d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{C})$, notée p_A ou juste p, est le polynôme de degré n défini par

$$p_A(z) = \det(zI - A). \tag{8}$$

Théorème 2.2. *On a que λ est valeur propre de A si et seulement si $p_A(\lambda) = 0$.*

Exercice 5. Démontrez le théorème 2.2.

Une conséquence du théorème 2.2 et du théorème fondamental de l'algèbre est que les valeurs propres des matrices à coefficients réels peuvent êtres complexes (ainsi que les vecteurs propres). Il est donc approprié d'utiliser $\mathbb{C}$ comme corps pour les matrices et vecteurs.

2.7 Multiplicité algébrique

Par le théorème fondamental de l'algèbre, on peut factoriser p_A comme

$$p_A(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)...(z - \lambda_n), \tag{9}$$

pour $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i \in [1, n]$. Alors λ_i est valeur propre de A, et toutes les valeurs propres de A sont dans la liste des λ_i: $\{\lambda_i\} = \Lambda(A)$, le spectre de A. En général, les racines λ_i ne sont pas **simples**, elles apparaissent plus d'une fois. On définit la **multiplicité algébrique de** λ_i sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. Une valeur propre est simple si sa multiplicité algébrique est égale à 1.

Théorème 2.3. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée. Alors A possède n valeurs propres, comptant les multiplicités algébriques. En particulier, si les racines de p_A sont simples, alors A possède n valeurs propres distinctes.*

Exercice 6. Démontrez le théorème 2.3. Montrez que la multiplicité algébrique d'une valeur propre est supérieure ou égale à sa multiplicité géométrique.

Preuve des multiplicités. Soit m la multiplicité géométrique de la valeur propre λ. On forme une matrice $n \times m$ $\hat{V}$ avec m colonnes formant un base orthonormée du sous-espace propre $E_\lambda = \{x | Ax = \lambda x\}$ ($\dim E_\lambda = m$ par définition). On étend $\hat{V}$ à une matrice unitaire, en complétant les colonnes avec des vecteurs orthonormés. On obtient une matrice $B = V^* AV$ où

$$B = \begin{pmatrix} \lambda I & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{10}$$

La matrice B est triangulaire par blocs, elle possède donc la valeur propre λ avec multiplicité algébrique au moins égale à m. On montre facilement que les matrices A et B on les mêmes polynômes caractéristiques, et donc les mêmes valeurs propres et multiplicités algébriques. La multiplicité algébrique de la valeur propre de A, λ est donc au moins égale à m.

2.8 Matrices semblables

Définition 4. On dit que deux matrices A et B sont **semblables** s'il existe une matrice X inversible telle que $B = XAX^{-1}$.

Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, dans deux bases différentes. Les matrices A et A^{-1} ont plusieurs points en commun.

Théorème 2.4. *Si X est inversible, alors les matrices A et XAX^{-1} partagent les mêmes polynômes caractéristiques, les mêmes valeurs propres et les mêmes multiplicités géométriques et algébriques. Par contre elles n'ont pas les mêmes vecteurs propres.*

Preuve. Les polynômes caractéristiques sont les mêmes

$$\begin{aligned}
p_{XAX^{-1}}(z) &= \det(zI - XAX^{-1}) && (11)\\
&= \det(XzIX^{-1} - XAX^{-1}) && (12)\\
&= \det(X(zI - A)X^{-1}) && (13)\\
&= \det(X)\det(zI - A)\det(X^{-1}) && (14)\\
&= \det(zI - A) && (15)\\
&= p_A(z). && (16)
\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres et les multiplicités algébriques sont les mêmes. Pour la multiplicité géométrique, soit E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeurs propre λ. Alors XE_λ est un sous-espace propres de XAX^{-1} et inversement.

Théorème 2.5. *Une matrice A est diagonalisable, c.-à-d. qu'elle admet une décomposition en valeurs propres, si et seulement si pour toute valeur propre, la multiplicité géométrique est égale à la multiplicité algébrique.*

2.9 Déterminant et trace

La **trace** d'une matrice A carrée $n \times n$ est la somme des éléments diagonaux:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{17}$$

Le déterminant et la trace de A sont reliées à ses valeurs propres:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{18}$$

et

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{19}$$

References

[1] Jean Fresnel. *Algebre des matrices*. Hermann, 2013.

[2] Lloyd N Trefethen and David Bau III. *Numerical linear algebra*, volume 50. Siam, 1997.