Corrigé devoir 2

Exercice 1 1. Montrer que, si $\{H_i, i \in I\}$ est une famille de sous-groupes de G, alors $\cap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

$\cap_{i\in I} H_i$ est non vide car l'élément neutre de G est dans tous les sous-groupes H_i. Soient h, k deux éléments de $\cap_{i\in I} H_i$. Alors pour tout $j \in I$, $hk^{-1} \in H_j$ car H_j est un sous-groupe de G, d'où $hk^{-1} \in \cap_{i\in I} H_i$. L'ensemble $\cap_{i\in I} H_i$ est donc un sous-groupe de G.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux sous-groupes de G soit un sous-groupe de G.

   Soient H et K deux sous-groupes. Montrons qu'il est nécessaire que $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$ pour que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G. Sinon il existerait $h \in H \setminus K$ et $k \in K \setminus H$. Mais alors $hk \notin H$ car $h^{-1}hk \notin H$. De même $hk \notin K$, donc $H \cup K$ ne serait pas un sous-groupe. Réciproquement la condition $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$ est évidemment suffisante.

3. Soit G un ensemble non vide muni d'une loi associative et d'un élément 1 tels que pour tout g de G, $1g = g$ et il existe $h \in G$ tel que $hg = 1$. Montrer que G est un groupe.

   Soit $g \in G$. Par hypothèse il existe $h \in G$ tel que $hg = 1$. Vérifions que $gh = 1$. On a $hgh = 1h = h$. Soit $k \in G$ tel que $kh = 1$. Alors $1 = kh = khgh = 1gh = gh$. De plus $g1 = ghg = 1g = g$.

   On a donc montré que 1 était un élément neutre et que tout élément avait un symétrique.

4. Montrer que, si H est une partie finie non vide d'un groupe G telle que pour tout $x, y \in H$ $xy \in H$, alors H est un groupe.

   Soit $h \in H$. Alors $\{h^k : k > 0\}$ est une partie de H. Comme H est fini, il existe $k_1 < k_2$ tels que $h^{k_1} = h^{k_2}$. Mais alors $h^{k_2-k_1-1}$ est l'inverse de h et appartient à H.

5. Montrer que, si K, H sont deux sous-groupes de G alors $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

   Notons que HK contient toujours l'élément neutre. Supposons que HK soit un sous-groupe de G. Soient $h \in H$ et $k \in K$. Alors $kh = (h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK$. On a par ailleurs $(hk)^{-1} = h'k'$ pour un $h' \in H$ et un $k' \in K$. Donc $hk = k'^{-1}h'^{-1} \in KH$. D'où $HK = KH$.

   Réciproquement, supposons que $HK = KH$. Soient x et y deux éléments de HK. Alors $x = h_1k_1$ et $y = h_2k_2$. D'où $xy^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2$. Comme $k_1k_2^{-1}h_2 \in KH = HK$, il existe $h' \in H$ et $k' \in K$ tel que $k_1k_2^{-1}h_2 = h'k'$. D'où $xy^{-1} = h_1h'k' \in HK$.

6. Montrer qu'un groupe dont le carré de chaque élément égale le neutre est abélien.

   Soient a, b deux éléments du groupe. Alors

$$ba = (ab)^2 ba = ababba = abaa = ab.$$

Exercice 2 Soit $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$ et expliciter tous ses sous-groupes. Quel est son centre ?

On remarque que $I^2 = J^2 = K^2 = -Id$. *De plus* $IJ = K$, *il suit que* $JK = I$, $KI = J$, $JI = -K$, $KJ = -I$ *et* $IK = -J$. *D'où*

$$\mathbb{H}_8 = \{Id, -Id, I, J, K, -I, -J, -K\}.$$

Les éléments $I, J, K, -I, -J, -K$ *sont d'ordre* 4. *On obtient comme sous-groupes de* $\mathbb{H}_8$ *:*

$\{Id\}$ *(ordre* 1*)*, $\langle -Id\rangle$ *(ordre* 2*)*, $\langle I\rangle$, $\langle J\rangle$, $\langle K\rangle$ *(ordre* 4*) et* $\mathbb{H}_8$.

Comme $IJ \neq JI$ *et* $IK \neq KI$, *le centre de* $\mathbb{H}_8$ *est* $\langle -Id\rangle$.