Licence de mathématiques L3 12 novembre 2009
Université Claude Bernard (Lyon 1)
Département de Mathématiques - U.F.R. Sciences et technologies

Algèbre et théorie des nombres
Examen partiel

Durée : 2 heures

Ni document ni calculatrice. Le barème sur 20 est indicatif.

I - Arithmétique (4 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 2x & \equiv & 4 \pmod 5 \\ 6x & \equiv & 4 \pmod 8 \end{cases}$$

2. Montrer qu'un entier de la forme $8k-1$ n'est pas la somme de trois carrés.

II - Groupe symétrique (4 points).

On considère les deux permutations dans S_8 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 7 & 5 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les décompositions en cycles disjoints de σ et τ.
2. Calculer leurs signatures.
3. Les permutations σ et $\tau\sigma^{-1}$ sont elles conjuguées ?
4. Combien y-a-t-il de permutations dans S_8 conjuguées à σ ?

III - Groupes - Questions de cours (5 points)

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit G un groupe. Montrer que le centre de G,

$$Z(G) = \{g \in G : \forall x \in G, gx = xg\},$$

   est un sous-groupe de G qui est commutatif et normal dans G.

2. Soit ϕ un morphisme d'un groupe G vers un groupe G'. Montrer que si H' est un sous-groupe de G' alors $\phi^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. Montrer que si de plus H' est normal dans G' alors $\phi^{-1}(H')$ est normal dans G.

3. Soit G un groupe et $D(G)$ le sous-groupe engendré par les commutateurs :

$$D(G) = \langle ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G \rangle.$$

   (a) Montrer que $D(G)$ est normal dans G.

   (b) Montrer que le groupe quotient $G/D(G)$ est abélien.

IV - Groupes à 9 éléments (7 points).

1. Donnez deux exemples de groupes à 9 éléments non isomorphes.

2. Soit G un groupe d'ordre 9 non cyclique.

   (a) Quels sont les ordres des éléments de G.

   (b) Montrer que G est engendré par deux éléments a et b.

   (c) Montrer que

$$G = \{1, a, b, a^2, b^2, ab, ab^2, a^2b, a^2b^2\}.$$

   (d) Montrer que $ba \in \{ab, ab^2, a^2b, a^2b^2\}$.

   (e) Montrer que $(ba)^2 = a^2b^2$.

   (f) Déduire des questions précédentes que $ba = ab$.

   (g) En déduire que G est commutatif et que G est isomorphe à $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$.

3. Conclure.