3. Groupes : ordre, sous-groupes, premiers exemples

Rappel : Ordre d'un groupe, ordre d'un élément
On dit qu'un groupe G est d'ordre n s'il contient n éléments.
L'ordre d'un élément $x \in G$ est le plus petit entier strictement positif m tel que $x^m = 1$ (en notation multiplicative).

Exercice 3.1

1. Donner un exemple de groupe commutatif G et de deux éléments $a, b \in G$ tous deux d'ordre 4 tels que le produit ab soit d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 4 ?
2. En général, montrer que dans un groupe commutatif G, si ordre$(a) = n$ et ordre$(b) = m$ alors ordre(ab) divise PPCM(ordre(a),ordre(b)).
3. Est-il possible d'avoir un groupe G et deux éléments d'ordre 2 $x, y \in G$ tel que $x.y$ soit d'ordre infini (si oui, donner un exemple ; si non, donner un court argument) ?
4. Est-il possible d'avoir un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini ?

Exercice 3.2 (Avril 2005)

1. Soient x et y deux éléments d'ordres finis, premiers entre eux, d'un groupe commutatif G. Montrer que l'ordre de xy est égal au produit des ordres de x et y.
2. Soit y un élément de G d'ordre $p^\alpha m$ où m est un entier et p est premier. Montrer que y^m est d'ordre p^α.
3. Soit G un groupe commutatif de cardinal fini n. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
4. Calculer l'ordre de chaque élément du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le résultat de la question 3. est-il vérifié ?
5. Calculer l'ordre de chaque élément du groupe S_3. Le résultat de la question 3. est-il vérifié ?

Exercice 3.3 Soit n un entier strictement positif.

a) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique. (On pourra pour cela utiliser le morphisme $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui a un entier k associe sa classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). En déduire que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

b) Montrer que pour tout d divisant n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe d'ordre d.
Indication : considérer l'ensemble

$$H := \{\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \overline{dk} = \bar{0}\}.$$

c) Montrer que le nombre d'éléments d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est égal à $\varphi(d)$.

d) En déduire une nouvelle démonstration de la relation

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Exercice 3.4 a) Soit G un groupe fini d'ordre n tel que pour tout diviseur d de n, il y ait au plus d éléments g de G vérifiant $g^d = 1$. Montrer que G est cyclique.

b) Montrer que pour tout p premier, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

Exercice 3.5 1. Montrer que, si $\{H_i, i \in I\}$ est une famille de sous-groupes de G, alors $\cap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux sous-groupes de G soit un sous-groupe de G.
3. Soit G un ensemble non vide muni d'une loi associative et d'un élément 1 tels que pour tout g de G, $1g = g$ et il existe $h \in G$ tel que $hg = 1$. Montrer que G est un groupe.
4. Montrer que, si H est une partie finie non vide d'un groupe G telle que pour tout $x, y \in H$ $xy \in H$, alors H est un groupe.
5. Montrer que, si K, H sont deux sous-groupes de G alors $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
6. Montrer qu'un groupe dont le carré de chaque élément égale le neutre est abélien.

Exercice 3.6 Soit $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$ et expliciter tous ses sous-groupes. Quel est son centre ?

Exercice 3.7 On note D_4 le groupe des isométries du carré pour la composition des applications (on l'appelle le quatrième groupe diédral, d'où la notation). Quel est l'ordre de ce groupe ? Quel est l'ordre de chacun de ses éléments ? Est-ce un groupe cyclique ? Est-ce un groupe commutatif ?

> **Rappel : Morphisme de groupes**
> On dit qu'une application $f : G_1 \to G_2$ entre deux groupes est un morphisme si pour tous $x, y \in G_1$ on a $f(x.y) = f(x).f(y)$.

Exercice 3.8 1. Donner un exemple de morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}^*, .)$. Est-ce un isomorphisme ?

2. L'ensemble des bijections croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un groupe ? Et pour les décroissantes ?
3. Est-il possible de définir une loi $*$ sur l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$ de façon à ce que $(\mathbb{N}, *)$ devienne un groupe ?

Exercice 3.9 1. Donner deux exemples de groupes d'ordre 4 non isomorphes entre eux.

2. Donner deux exemples de groupes d'ordre 6 non isomorphes entre eux.
3. Donner cinq exemples de groupes d'ordre 8 non isomorphes entre eux.

> **Rappel : Groupe engendré**
> Soit G un groupe et S une partie de G. On note $\langle S\rangle$ le plus petit sous-groupe de G contenant S. On dit que $\langle S\rangle$ est le sous-groupe engendré par S. Si $\langle S\rangle = G$, on dit que S est une partie génératrice de G.

Exercice 3.10 Donner une partie génératrice la plus petite possible du groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Y a-t-il plusieurs choix possibles ? Mêmes questions pour les groupes S_3, $\mathbb{H}_8$ et $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 3.11 a) Donner un exemple de sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ dense de type fini (c'est-à-dire engendré par un nombre fini d'éléments).

b) Tous les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont-ils de type fini ?

c) Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit monogènes soit denses.