4. Groupes : sous-groupes distingués, quotients

Rappel : Sous-groupe normal (ou distingué)
On dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est normal (ou distingué) si pour tout $x \in G$ on a $xH = Hx$.

Exercice 4.1
1. Montrer que le sous-groupe $H = \{id, (12)\} \subset S_3$ n'est pas distingué, et expliciter les classes à droite et à gauche modulo H.
2. Trouver tous les sous-groupes distingués du groupe symétrique S_3.
3. Montrer que la loi de composition sur S_3 n'induit pas une loi de groupe sur les classes à droite modulo H.

Exercice 4.2 On considère le sous-groupe H de S_5 engendré par (12) et (13).
1. Le sous-groupe H est-il distingué dans S_5 ?
2. Déterminer le nombre de classes à droite modulo H.

Exercice 4.3 Montrer qu'un sous-groupe $H \subset G$ d'indice 2 est toujours distingué.

Rappel : Quotient
Si H est un sous-groupe distingué de G, l'ensemble des classes (à droite ou à gauche) de G modulo H forme un groupe G/H appelé groupe quotient de G par H.

Exercice 4.4
1. Montrer que le cercle unité $U \in \mathbb{C}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la loi $+$ sur $\mathbb{R}$ permet de munir le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe.
4. Montrer que le groupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(U, .)$.
5. Montrer que la loi . sur $\mathbb{R}$ n'induit pas une loi sur le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 4.5 Soit H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G. Montrer que

$$card(HK) = card(KH) = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

Exercice 4.6 Montrer que tous les sous-groupes du groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$ sont normaux dans $\mathbb{H}_8$.

Exercice 4.7 Soit H un sous-groupe normal de A_5.
1. Montrer que si H contient un 3-cycle alors $H = A_5$.
2. Montrer que si H contient σ produit de deux transpositions à supports disjoints, alors il existe un 3-cycle $\gamma \in A_5$ tel que $\gamma\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}$ soit un 3-cycle.
3. En s'inspirant de la question précédente, montrer que H contient toujours un 3-cycle.
4. Montrer que A_5 est un groupe simple.

Exercice 4.8 1. Donner un exemple de groupe contenant au moins deux sous-groupes d'indice 2.

2. Soit H un sous-groupe d'indice 2 de S_n. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma^2 \in H$. En déduire que H contient l'ensemble des 3-cycles et donc que $H = A_n$.
3. Pour un groupe G, on pose $D(G)$ le sous groupe de G engendré par les commutateurs

$$\{\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}, \forall \sigma, \tau \in G\}.$$

   Montrer que $D(G)$ est normal dans G.
4. En déduire que pour tout $n \geq 5$, $D(A_n) = D(S_n) = A_n$.
5. Déterminer tous les sous-groupes propres distingués de S_3, S_4, A_3 et A_4.

Exercice 4.9 Soit G un groupe. On fait opérer G sur l'ensemble de ses sous-groupes par automorphisme intérieur. C'est-à-dire que pour un sous-groupe H de G et un élément g de G, on pose :

$$g \cdot H = gHg^{-1}.$$

Le stabilisateur de H sous cette action est défini par :

$$N_G(H) = \{g \in G \text{ tel que } g \cdot H = H\}.$$

On l'appelle le normalisateur de H dans G.

1. Quel est le normalisateur d'un sous-groupe distingué ? Est-ce une caractérisation des sous-groupes distingués ?
2. Vérifier que H est distingué dans son normalisateur.
3. Dans le groupe S_4, trouver le normalisateur du sous-groupe à 2 éléments $\langle(12)(34)\rangle$.
4. Montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est normal.

Rappel : Passage au quotient
Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe, il existe un unique morphisme injectif $\bar{f} : G/Ker(\varphi) \to G'$ tel que $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$.

Exercice 4.10 1. Soit H le sous-ensemble de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ constitué des polynômes $P(X)$ vérifiant $P(\bar{1}) = P(\bar{2}) = 0$. Montrer que H est un sous-groupe (additif) et donner le nombre d'éléments dans le quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/H$.

2. On note (X^2+1) le sous-groupe de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de la forme $(X^2+1)Q(X)$. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel entre $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 4.11 On se donne N et H deux groupes, $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupe et on définit sur $N \times H$ la loi de composition suivante :

$$(n, h)(n', h') = (n\varphi(h)(n'), hh')$$

a) Montrer que cela muni $N \times H$ d'une structure de groupe, on note $N \rtimes_\varphi H$ le groupe ainsi obtenu, cette loi est appelée produit semi-direct.
b) Montrer que H et N s'injectent dans $N \rtimes_\varphi H$ et que H n'est pas distingué lorsque $\varphi \neq Id$.
c) Si H et K sont des sous-groupes de G sous quelles conditions peut-on écrire $G = HK \cong H \ltimes K$?
d) Montrer que $S_n = A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.