5. Actions de groupes

Rappel : Formule des classes
Si G est un groupe fini opérant sur un ensemble fini E, pour tout $x \in E$ on a l'égalité :

$$|\,\Omega(x)| = \frac{|G|}{|\,\mathrm{Stab}_G(x)|}$$

où $\Omega(x)$ est l'orbite de x sous l'action de G et $\mathrm{Stab}_G(x)$ le stablisateur de x.

Exercice 5.1 Soit $G = \left\{ f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \right\}$.
On fait agir G sur $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle. Décrire les orbites.

Exercice 5.2 On fait agir S_3 sur S_3 par conjuguaison. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 5.3 Un groupe de 35 éléments opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun d'eux. Combien y a t-il d'orbites ?

Exercice 5.4 Soit G un groupe de $143 = 11 \times 13$ éléments opérant sur un ensemble de 108 éléments. Montrer qu'il existe un point fixe.

Exercice 5.5 Soit G un groupe d'ordre n et q un diviseur de n. On fait agir G sur G par conjuguaison. Montrer que si $g \in G$ est d'ordre q alors $|\,\Omega(g)|$ divise n/q.

Exercice 5.6 En considérant l'action par conjugaison de A_5 sur l'ensemble des $5-$cycles montrer qu'il existe deux classes de conjugaisons de $5-$cycles dans A_5.

Exercice 5.7 Soit G un groupe fini qui opère sur un ensemble fini S. Pour tout $g \in G$, on pose :

$$S^g = \{s \in S \text{ tel que } gs = s\}.$$

1. Démontrer la formule $\sum_{s\in S} |\,\mathrm{Stab}_G(s)| = \sum_{g\in G} |S^g|$.
2. En déduire la formule de Burnside :

$$|G| \times (\text{nombre d'orbites}) = \sum_{g\in G} |S^g|.$$

Exercice 5.8 Soit G le groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube.

1. Montrer que G est isomorphe à S_4.
2. Décrire géométriquement les classes de conjugaison de G.
3. A l'aide de la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorier les faces d'un cube avec au plus trois couleurs à disposition.

Exercice 5.9 Soit G un groupe fini, et soit p le plus petit facteur premier de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p de G est distingué (Indication : considérer l'action de H sur les classes à gauche G/H).

Exercice 5.10 Rappelons que pour p un nombre premier, on appelle p-groupe un groupe dont le cardinal est une puissance de p. Le but de cet exercice est de démontrer que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre.

1. Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble X, notons X^G l'ensemble des points fixes de X sous G, c'est-à-dire $X^G = \{x \in X \text{ tel que } g \cdot x = x \text{ pour tout } g \in G\}$.
   Montrer que $|X| \equiv |X^G| \pmod p$.
   Indication : écrire X comme réunion disjointe de ses orbites sous l'action de G.
2. Conclure : présenter le centre du groupe comme les points fixes sous une action convenable de G. (Préciser l'action et l'ensemble sur lequel G agit).

Exercice 5.11 On se propose de démontrer le résultat suivant, attribué à Cauchy (1789-1857) :

Soit G un groupe commutatif fini, et p un diviseur premier de l'ordre de G. Alors G contient un élément d'ordre p.

1. Si $G = \{g_1, \cdots, g_d\}$ avec ordre$(g_i) = n_i$, on pose $H = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_d\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $\varphi : H \to G$.
2. En déduire qu'il existe un élément de G dont l'ordre est un multiple de p et conclure.

Exercice 5.12 On se propose de démontrer l'un des théorèmes de Sylow :

Soit G un groupe fini dont l'ordre est divisible par une puissance p^k d'un nombre premier p. Alors G contient un sous-groupe d'ordre p^k.

1. En considérant l'action de G sur lui-même par conjugaison, montrer que
   $$|G| = |Z(G)| + \sum_i |G|/|C(x_i)|$$
   où $Z(G)$ est le centre de G, $C(x)$ le centralisateur de l'élément x et les x_i sont des éléments de G que l'on précisera.

   Montrons le théorème par récurrence sur $|G|$: le résultat étant clair pour le groupe trivial, on suppose maintenant le résultat vrai pour les groupes d'ordre strictement inférieur à $|G|$.
2. Si p^k divise l'ordre de l'un des centralisateurs $C(x_i)$, montrer le résultat pour G.
3. Sinon :
   (a) Montrer qu'il existe $x \in Z(G)$ d'ordre p (indication : exercice précédent).
   (b) Montrer que $< x >$ est distingué dans G. On pose $G' = G/ < x >$, et on note $\bar{y} \in G'$ la classe de $y \in G$.
   (c) Montrer qu'il existe un sous-groupe K' de G' d'ordre p^{k-1}.
   (d) Posons $K = \{y \in G : \bar{y} \in K'\}$, et notons G/K (resp. G'/K') l'ensemble des classes à gauche modulo K (resp. modulo K'). Montrer qu'en posant $f : G/K \to G'/K', yK \to \bar{y}K'$ on définit une application bijective.
   (e) En déduire que K est un sous-groupe de G d'ordre p^k.