6. Anneaux de polynômes

Exercice 6.1 Donner des exemples de corps K : (i) fini, (ii) dénombrable, (iii) tel que tout polynôme dans $K[X]$ admette une racine, (iv) avec aucune des trois propriétés précédentes.

Exercice 6.2
1. Trouver deux polynômes distincts dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ qui définissent la même fonction de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Si K est un corps infini, montrer que deux polynômes distincts dans $K[X]$ définissent des fonctions distinctes de K dans K.

Exercice 6.3
1. Donner un exemple de polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle.
2. Montrer que tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 6.4 On appelle *entier de Gauss* tout nombre complexe de la forme $z = x + iy$ avec x, y des entiers relatifs.
1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss muni des lois d'addition et de multiplication usuelles est un anneau commutatif intègre. Est-ce un corps ?
2. Montrer que l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien (utiliser la fonction $N(z) = z\bar{z}$).
3. Trouver un pgcd et une relation de Bézout pour $-1 + 13i$ et $4 + i$. Même question pour $8 + 26i$ et $1 + 17i$.

Rappel : Idéal
Soit A un anneau commutatif. On dit que $I \subset A$ est un idéal si I est un sous-groupe additif de A et si $\forall x \in I, \forall y \in A$, on a $xy \in I$.

Exercice 6.5 Déterminer le PGCD de $X^3 + 4X^2 + 4X + 3$ et $X^3 + 5X^2 + 8X + 6$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.6 On considère l'anneau $\mathbb{R}[X]$.
1. Déterminer l'idéal J engendré par les polynômes X^3+3X^2+4X+2 et $X^4+2X^3+3X^2+2X+2$.
2. Donner un isomorphisme entre l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/J$ et le corps $\mathbb{C}$.

Exercice 6.7 On considère dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ les idéaux I, J engendrés par $2X$ et X^3, et par $3X$ et $X^2 + 1$ respectivement.
1. Montrer que $X^3 - 2X \in I \cap J$.
2. Montrer que $I + J = \mathbb{Z}[X]$. En déduire que $X^3 - 2X \in IJ$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes $P \in I$ et $Q \in J$ tels que $X^3 - 2X = PQ$.

Rappel : Morphisme d'anneaux
Soient A et B deux anneaux. On dit que $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux si pour tous $x, y \in A$ on a
1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. $f(1) = 1$.

Exercice 6.8
1. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau de $\mathbb{Z}$ vers un anneau donné A.
2. Soit A un anneau. Que peut-on dire d'un idéal qui contient 0 ? et d'un idéal qui contient 1 ?
3. Soient F un corps, A un anneau. Pourquoi tout morphisme d'anneaux $\phi : F \to A$ est-il injectif ?

Exercice 6.9 Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, et finalement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 6.10 Etablir les isomorphismes suivants :

1. $K[X]/(X-\alpha) \cong K$, où K est un corps et $\alpha \in K$.
2. $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{Z}[i]$.
3. $K[X,Y]/(X-\alpha) \cong K[Y]$ où K est un corps et $\alpha \in K$.
4. $K[X,Y]/(X-\alpha, Y-\beta) \cong K$ où K est un corps et $\alpha, \beta \in K$.

Exercice 6.11 On note $f(X) = (X-1)(X+1)^2 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Est-ce que l'anneau quotient $A = \mathbb{R}[X]/(f(X))$ est intègre ?
2. Déterminer tous les éléments de A tels que $a^2 = 0$.
3. Montrer que si $a^3 = 0$, alors $a^2 = 0$.
4. Montrer que A n'est isomorphe ni à l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^3)$, ni à $\mathbb{R}[X]/(X^3-1)$.
5. Déterminer l'idéal I de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les deux polynômes $f(X)$ et X^3-1. Déterminer l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/I$.

Exercice 6.12 On travaille dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$.

1. Déterminer si $P = 3X^3 + 2X^2 + X + 4$ est irréductible.
2. Soit $Q = X^2 - 1$. Trouver deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 6.13 Déterminer si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$:

$$4X^3 - 3X - \frac{1}{2} \ ; \quad X^6 - 3X^3 + 12X - 3 \ ; \quad X^n - 2 \text{ avec } n \geq 1.$$

Exercice 6.14 Montrer que pour p un nombre premier, le polynôme

$$P = X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1 = \frac{X^p - 1}{X - 1}$$

est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Indication : supposer que $P(X)$ admet une factorisation sur $\mathbb{Z}$, et obtenir une contradiction en réduisant modulo p.

Exercice 6.15 Dans l'anneau factoriel $\mathbb{R}[X,Y]$, trouver un PGCD de $X^3Y + X^2Y^2 - X^2Y + X^2 + XY + Y - 1$ et $X^3Y^2 + XY - X - 1$ et en déduire une factorisation de chacun de ces polynômes en irréductibles de $\mathbb{R}[X,Y]$.