7. Anneaux (II)

Rappel : Anneau euclidien, principal, factoriel.
Soit A un anneau commutatif intègre. On a les implications :
A euclidien $\Longrightarrow$ A principal $\Longrightarrow$ A factoriel

Exercice 7.1 Montrer que pour p premier l'anneau $\mathbb{Z}[t]/(p)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[t]$.

Exercice 7.2 Soit A un anneau principal.

1. Montrer que pour tout $a, b \in A$ il existe un PGCD de a et b et que l'on peut écrire une relation de Bézout.
2. Si $a, b \in A$ sont premiers entre eux montrer qu'on a un isomorphisme
$$A/(ab) \simeq A/(a) \times A/(b).$$

Exercice 7.3 Montrer l'isomorphisme
$$\mathbb{R}[X]/(X^2 - 3X + 2) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
Cet anneau est-il un corps ?

Exercice 7.4 Soit p un nombre premier. Déterminer tous les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Exercice 7.5 Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ le sous anneau de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$.

1. Montrer que tout x de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $x = a + b\sqrt{2}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ si et seulement si $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.
3. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ est engendré par -1 et $1 + \sqrt{2}$.

Exercice 7.6 (mai 2005) On note $\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k} \mid n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des décimaux.

1. Vérifier que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{D}$. Est-ce que $\mathbb{D}$ est un corps ?
3. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{D}$, $d \neq 0$, il existe un unique couple $(d', v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que
$$d = d'\, 10^v \quad \text{et} \quad 10 \not| d'.$$
Lorsque ces conditions sont satisfaites, on note : $\phi(d) = |d'|$. On convient que $\phi(0) = 0$.
4. Montrer que $\mathbb{D}$ est un anneau euclidien.
5. Donner des générateurs aussi simple que possible de l'idéal de $\mathbb{D}$ engendré par $\frac{46}{10}$ et $\frac{12}{100}$

Exercice 7.7 (juin 2005) 1. Déterminer si le polynôme $P = X^3 - 5X^2 + 11X - 4$ est réductible dans $Q[X]$.

2. On considère le polynôme P comme un polynôme $\bar{P}$ sur le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en remplaçant ses coéfficients par leurs classes modulo 3.
   (a) Décomposer $\bar{P}$ en facteurs irréductibles dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
   (b) Est-ce que l'anneau quotient $A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(P)$ est intègre ? Quel est le nombre d'éléments de A ?
3. (a) Déterminer tous les éléments A tels que $a^2 = 0$.
   (b) Montrer que si $a^3 = 0$, alors $a^2 = 0$.
   (c) Utiliser (a) et (b) pour montrer que A n'est pas isomorphe à l'anneau quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(X^3 - \bar{1})$.
   Déterminer l'idéal I de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ engendré par les deux polynômes $\bar{P}$ et $X^3 - \bar{1}$.
   Déterminer l'anneau quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/I$.
4. Déterminer l'idéal J de $Q[X]$ engendré par P et $X^3 - 1$.

Exercice 7.8 Soit d un nombre entier relatif sans facteur carré, on note $\sqrt{d}$ une racine dans $\mathbb{C}$ de l'équation $X^2 - d = 0$. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un anneau intègre.
2. Pour $x = a + b\sqrt{d}$ dans $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$ on note $N(x) = a^2 - b^2d = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d})$.
   Montrer que pour tout x, x', $N(xx') = N(x)N(x')$.
3. En déduire qu'un élément x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ssi $N(x) = \pm 1$.
4. On travaille dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$. Montrer que 2, $3 - \sqrt{13}$ et $-3 - \sqrt{13}$ sont irréductibles. En déduire que $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ n'est pas factoriel.
5. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 7.9 Le but de cet exercice est de montrer que l'anneau $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ est principal mais non euclidien.

1. Montrer que l'anneau A est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$, puis que $X^2 - X + 5$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ et en déduire que (2) est un idéal maximal de A.
2. Montrer que pour tout couple (a, b) d'éléments non nuls de A, il existe un couple (q, r) d'éléments de A tel que (en notant $N(z) = z\bar{z}$) :
   $a = bq + r$ ou $2a = bq + r$,
   $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$.
3. Montrer que A est principal.
4. Montrer que ± 1 sont les seuls inversibles de A.
5. En déduire que A n'est pas euclidien (montrer d'abord que dans un anneau euclidien B, il existe $x \in B$ non inversible tel que tout élément du quotient $B/(x)$ puisse s'écrire $\bar{y}$ avec $y \in B$ inversible.)