Maîtrise de Mathématiques
Logique et Complexité (Année 2003-2004)
TD 6

Exercice 1.

(1) Montrer que $\tilde{\mathbb{Q}}$ n'est pas ω-saturé.
(2) Montrer que $\tilde{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ n'est pas ω-saturé.
(3) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas ω-saturé.
(4) Montrer que $\mathbb{C}$ est ω-saturé.

Exercice 2. On vise à prouver que K est réel clos si le corps quotient $K[X]/(X^2+1)$ est algébriquement clos. Soit K un corps ordonné, et $\mathbb{K} = \{a + ib : (a, b) \in K^2\}$, où $i^2 = -1$. On veut montrer que tout polynôme P qui change de signe a une racine dans K. On considère ici K comme un sous-corps de $\mathbb{K}$, grâce à l'injection canonique $a \mapsto a + i0$.

(1) Montrer que $X^2 + 1$ est irréductible dans K, et donc que $K[X]/(X^2+1)$ est bien un corps.
(2) Montrer qu'on peut se restreindre au cas où P est irréductible dans K, de degré ≥ 2.
(3) On définit dans $\mathbb{K}$ l'application $f : a + ib \mapsto a - ib$. Montrer que f est un automorphisme.
(4) Montrer que si ζ est racine de P, alors $f(\zeta)$ est également racine, et que, si P est irréductible dans K de degré ≥ 2, alors $\zeta \neq f(\zeta)$.
(5) Montrer qu'un polynôme irréductible $P \in K[X]$ de degré au moins deux s'écrit $P(X) = \alpha(X - \zeta)(X - f(\zeta))$, où $\alpha \in K$.
(6) En déduire que P est de signe constant sur K, et conclure.

Remarque : Le réciproque est le théorème d'Alembert-Gauss, dont la démonstration pour $\mathbb{R}$ marche aussi bien pour tout corps réel clos.

Exercice 3. On considère la structure $\mathfrak{M}$ suivante, définie sur l'ensemble $\mathbb{C} \times \mathbb{N}$ augmenté d'un point qu'on appelle la poubelle. Le langage $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{M}$ comprend, outre l'égalité, une constante π pour la poubelle, une fonction unaire $\sim$ et deux fonctions binaires $\oplus$ et $\otimes$, interprétées comme suit:

$$\sim(c, n) = (-c, n), \quad \sim\pi = \pi, \quad (c, n) \oplus (d, n) = (c + d, n), \quad (c, n) \otimes (d, n) = (cd, n)$$

$$x \oplus \pi = \pi \oplus x = x \otimes \pi = \pi \otimes x = \pi \quad \text{et} \quad (c, m) \oplus (d, n) = (c, m) \otimes (d, n) = \pi \text{ pour } m \neq n.$$

(1) Quelle est l'interpretation dans $\mathfrak{M}$ de la formule $\varepsilon(x, y)$ suivante : $x \oplus (\sim x) = y \oplus (\sim y)$?
(2) On considère un polynôme $P(x_1, \ldots, x_m)$, à coefficients entiers relatifs. Décrire une formule libre (sans constantes) $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ du langage $\mathcal{L}$ interprétant dans $\mathfrak{M}$ l'ensemble des m-uples $((c_1, n), \ldots, (c_m, n))$ tels que $P(c_1, \ldots, c_m) = 0$, avec $n \in \mathbb{N}$.
(3) Vérifier rapidement que l'ensemble de conditions suivantes se traduit par la satisfaction d'un ensemble consistant T d'énoncés (on précisera les conditions qui demandent un ensemble infini d'énoncés).
   - ε est une relation d'équivalence.
   - Le point π n'est équivalent qu'à lui même modulo ε.
   - Si X est une classe d'équivalence modulo ε différent de $\{\pi\}$, les restrictions à X de $\sim, \oplus, \otimes$ prennent leurs valeurs dans X et y induisent un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.
   - Si x et y ne sont pas congrus modulo ε, alors $x \oplus y = x \otimes y = \pi$.
   - $\sim\pi = \pi \oplus \pi = \pi \otimes \pi = \pi$.
(4) Montrer que dans un modèle ω-saturé $\mathfrak{N}$ de T les structures de corps définies sur chacune des classes non-triviales de ε sont toutes ω-saturées.
(5) Montrer que les isomorphismes locaux entre deux modèles ω-saturés $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ sont des ∞-isomorphismes.
(6) Montrer que T est complète, et élimine les quanteurs.
(7) La théorie T est-elle κ-catégorique pour un cardinal κ ?