Feuille 2

Exercice 1 (Axiome du choix)**.** Une *fonction de choix* sur un ensemble X est une application $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \to X$ telle que pour toute partie $A \subseteq X$ non vide, on ait $\varphi(A) \in A$.
Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides, le produit $\Pi_{i\in I} X_i$ de ces ensembles est non vide.
2. Tout ensemble X admet une fonction de choix.
3. Pour tous les ensembles X, Y et toute application surjective $g\colon X \to Y$, il existe une application $h\colon Y \to X$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de Y dans Y.

Exercice 2.
— L'axiome des choix dépendants (ACD) est l'énoncé suivant : pour tout ensemble X et toute relation binaire sur X tels que pour tout $x \in X$ il existe $y \in X$ vérifiant xRy, il existe alors une suite $(x_n)_{n<\omega}$ de X telle que $x_n R x_{n+1}$ pour tout n.
— L'axiome du choix dénombrable (ACden) est l'énoncé : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

1. Montrer que (AC) implique (ACD).
2. Montrer que (ACD) implique (ACden).

Exercice 3.
1. Tout ensemble infini a un sous-ensemble dénombrable.
2. Montrer que l'union d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 4. On rappelle qu'un ensemble est fini s'il est équipotent à un ordinal fini (c.à.d. à un entier $n < \omega$) et qu'un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à ω.

Un ensemble X est dit *Dedekind-fini* si toute injection de X dans X est surjective.

1. Montrer que tout ensemble fini est Dedekind-fini.
2. Montrer qu'un ensemble est Dedekind-infini si et seulement s'il contient un sous-ensemble dénombrable.
3. Montrer qu'un ensemble infini est Dedekind-infini.
4. Montrer la question précédente en utilisant (ACden) mais pas (ACD).

Exercice 5. Donner une démonstration des deux résultats classiques d'analyse suivants :
(a) Soit X un espace métrique et F une partie de X. Alors F est fermé si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.
(b) Soit X un espace métrique et $f\colon X \to \mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle). Alors f est continue (i.e l'image réciproque par f d'un fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de X) si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X$ on a $\lim f(x_n) = f(x)$.